UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

Inegalităţi pe scale temporale

Teză de doctorat
- Rezumat -

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. Constantin P. NICULESCU

Doctorand:
Constantin-Cristian DINU

-2008-

Introducere

Această teză este un studiu aprofundat al scalelor temporale. Teoria pe scalele temporale a fost introdusă de Stefan Hilger în teza sa de doctorat [24], realizată sub conducerea lui Bernd Aulbach, ca o modalitate de a unifica analiza discretă cu cea continuă.

Lucrarea de faţă îşi propune, în principal, să aducă generalizări ale unor inegalităţi clasice din analiza matematică, în special din analiza convexă. În acelaşi timp, sunt generalizate unele rezultate şi metode utilizate în obţinerea de inegalităţi şi este adusă în prim plan problematica antagonică a continuului şi discretului. Sunt cercetate aspecte legate de convexitatea pe scalele temporale şi sunt studiate proprietăţile unor funcţii definite pe aceste tipuri de mulţimi.

Un element fundamental de filosofie matematică al acestei lucrări îl reprezintă legătura specială dintre continuu şi discret, dar şi diferenţa esenţială dintre cele două noţiuni.

Din punct de vedere structural, lucrarea este alcătuită din 6 capitole, pe care le prezentăm în cele ce urmează, evidenţiind rezultatele importante.

1. Calculul pe scale temporale

În Capitolul 1 prezentăm noţiunile principale legate de calculul pe scalele temporale. Pentru funcţii definite pe scale temporale, definim derivatele şi integralele standard (delta şi nabla), dar şi derivata şi integrala combinată diamant-α. Rezultate fundamentale ale acestui domeniu sunt prezentate aici, împreună cu o serie de rezultate noi, importante ulterior, pe parcursul lucrării şi care merită atenţia, cum ar fi calculul derivatelor şi integralelor delta şi nabla pe o scală temporală de forma $\{a_0, a_1, ..., a_n, ..., b\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, (vezi şi [10]).

Propoziţia 1. (Propoziţia 1.3). *Fie $a, b \in \mathbb{T}$ şi $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.*

(iv) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător şi convergent cu $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ şi $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{a_0, a_1, ..., a_n, ..., b\}$, atunci

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(a_i)(a_{i+1} - a_i).$$

Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător şi convergent cu $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ şi $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{b, ..., a_n, ..., a_1, a_0\}$, atunci

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(a_{i+1})(a_i - a_{i+1}).$$

Exemple importante de scale temporale, pe care le vom folosi frecvent în capitolele următoare, sunt prezentate aici. Aceste exemple conţin, desigur, mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, dar şi mulţimea multiplilor întregi ai unui număr real $h > 0$

şi mulţimea puterilor întregi ale unui număr real $q > 1$, inclusiv 0 (această scală temporală duce la ceea ce se numeşte q-calcul). Alte exemple sunt reuniunile de intervale închise disjuncte (care au aplicaţii în dinamica populaţiei) sau chiar scale temporale "exotice", cum ar fi mulţimea lui Cantor. Pe fiecare din aceste mulţimi se exemplifică principalii operatori folosiţi în calculul pe scale temporale (operatorii de salt la dreapta σ şi de salt la stânga ρ), dar şi modalităţile de calcul utilizate în capitolele următoare. Teoremele care redau proprietăţi importante pe scale temporale sunt prezentate aici. Astfel, se contureză proprietăţiile care sunt comune derivatelor şi integralelor obişnuite, dar şi cele specifice noilor noţiuni definite, ceea ce conduce la o familiarizare cu acest domeniu.

Un caz aparte îl reprezintă derivata şi integrala diamant-α, întrucât derivata combinată $\Diamond_\alpha$ nu este o derivată dinamică (vezi Exemplul 1.8 şi relaţia (1.4)).

2. Scala temporală între discret şi continuu

În Capitolul 2 stabilim unele rezultate pornind de la premiza că o scală temporală este obţinută din mulţimea numerelor reale, prin eliminarea unor intervale deschise sau este obţinută din alte scale temporale prin adăugarea sau extragerea de intervale sau puncte izolate. Astfel, în cazul unor funcţii monotone, se pot determina unele relaţii între integralele delta, nabla şi diamant-α pe scalele temporale şi axa reală. Funcţiile afine joacă un rol important în analiza reală şi este de aşteptat ca acelaşi lucru să se întâmple şi pe scalele temporale. De aceea, studiul integralelor unei funcţii afine pe orice scală temporală ne poate oferi instrumente folositoare în obţinerea unor inegalităţi.

În Secţiunea 2, introducem o noţiune nouă, originală, şi anume, **măsura de granulozitate** dintre două puncte ale unei scale temporale.

Definiţia 1. (Definiţia 2.1). *Fie $\mathbb{T}$ o scală temporală şi $a, b \in \mathbb{T}$, finite. Definim* măsura de granulozitate *dintre a şi b ca fiind funcţia $G : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ dată de*

$$G(a, b) = \sum_{a \le t < b} \frac{\mu(t)^2}{2} = \sum_{a < t \le b} \frac{\nu(t)^2}{2}.$$

În continuare, prezentăm unele exemple în care aceasta intervine, precum şi unele proprietăţi ale acestei funcţii.

Propoziţia 2. (Propoziţia 2.1). *Fie $\mathbb{T}$ o scală temporală, $a, b \in \mathbb{T}$ şi măsura de granulozitate $G : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$. Atunci*

$$G(a, b) = G(a, x) + G(x, b), \text{ pentru orice } x \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \tag{1}$$

$$\int_a^b t \Diamond_\alpha t = \frac{b^2 - a^2}{2} + (1 - 2\alpha) G(a, b), \text{ pentru orice } \alpha \in [0, 1], \tag{2}$$

(3) $$G(a,b) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } [a,b] = [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Tot în această Secţiune calculăm integralele $\int_a^b t\Delta t$, $\int_a^b t\nabla t$ şi $\int_a^b t\Diamond_\alpha t$ în raport cu $\int_a^b t\,\mathrm{d}t$ şi măsura de granulozitate $G(a,b)$, (vezi [10]).

Un alt element de noutate apare în Secţiunea 3, unde definim funcţiile convexe pe scale temporale, noţiune care generalizează şi include noţiunile de funcţii convexe definite pe axa reală precum şi pe aceea de şiruri convexe.

Definiţia 2. (Definiţia 2.2). *O funcţie $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se numeşte* convexă *pe $I_{\mathbb{T}}$, dacă*

(4) $$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(s),$$

pentru toţi $t, s \in I_{\mathbb{T}}$ şi toţi $\lambda \in [0,1]$ astfel încât $\lambda t + (1-\lambda)s \in I_{\mathbb{T}}$.

Funcţia f este strict convexă *pe $I_{\mathbb{T}}$ dacă inegalitatea 4 este strictă pentru oricare puncte distincte $t, s \in I_{\mathbb{T}}$ şi $\lambda \in (0,1)$.*

Funcţia f este concavă *(respectiv* strict concavă*) pe $I_{\mathbb{T}}$, dacă $-f$ este convexă (respectiv strict convexă).*

O funcţie care este în acelaşi timp şi convexă şi concavă pe $I_{\mathbb{T}}$ se numeşte afină *pe $I_{\mathbb{T}}$.*

Legătura dintre convexitatea unei funcţii şi monotonia derivatelor delta şi nabla este prezentată în Teoremele 2.1 şi analogul său nabla, dar şi legătura cu derivatele delta şi nabla secundare (Corolarul 2.3).

Teorema 1. (Teorema 2.1). *Fie $f : I_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ o funcţie delta diferenţiabilă pe $I_{\mathbb{T}}^{\kappa}$. Dacă f^{Δ} este crescătoare (descrescătoare) pe $I_{\mathbb{T}}^{\kappa}$, atunci f este convexă (concavă) pe $I_{\mathbb{T}}$.*

Un rezultat care stabileşte conexiunea puternică dintre convexitatea pe axa reală şi o scală temporală este Teorema 2.4.

Teorema 2. (Teorema 2.4). *O funcţie $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ este convexă pe $I_{\mathbb{T}} = I \cap \mathbb{T}$ dacă şi numai dacă există o funcţie convexă $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\tilde{f}(t) = f(t)$, pentru toţi $t \in I_{\mathbb{T}}$.*

De asemenea, continuitatea unei funcţii convexe, pe un interval deschis al scalei temporale este demonstrată. O noţiune specifică funcţiilor continue, subdiferenţiala, este extinsă şi pentru funcţiile definite pe scale temporale şi sunt prezentate o serie de proprietăţi ale acesteia.

Rezultatele noi din acest Capitol sunt publicate în lucrările [10] şi [13].

3. Inegalitatea Hermite–Hadamard

Capitolul 3 este dedicat Inegalităţii Hermite–Hadamard. În prima Secţiune, prezentăm o variantă a acestei inegalităţi pentru ponderi pozitive.

Teorema 3. (Teorema 3.1). *Fie* $\mathbb{T}$ *o scală temporală,* $a, b \in \mathbb{T}$ *şi* $m, M \in \mathbb{R}$*. Fie* $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi convexă,* $g \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, [m, M])$ *şi* $w \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *astfel încât* $w(t) \geq 0$ *pentru toţi* $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ *şi* $\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t > 0$*. Atunci*

$$\begin{aligned} f\left(x_{g,w,\alpha}\right) &\leq \frac{1}{\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t} \int_a^b f(g(t))w(t)\Diamond_\alpha t \\ &\leq \frac{M - x_{g,w,\alpha}}{M - m} f(m) + \frac{x_{g,w,\alpha} - m}{M - m} f(M), \end{aligned} \tag{5}$$

unde $x_{g,w,\alpha} = \int_a^b g(t)w(t)\Diamond_\alpha t / \int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t$*.*

Considerând ponderile constante, putem obţine o generalizare pentru funcţii monotone (Teorema 3.3).

Cea de-a doua Secţiune prezintă varianta completă cu ponderi a inegalităţii Hermite–Hadamard. Mai precis sunt definite ponderile α-Steffensen–Popoviciu şi α-Hermite–Hadamard şi se demonstrează că primele verifică membrul stâng al inegalităţii (5), iar cele din urmă verifică membrul drept al inegalităţii (5).

Definiţia 3. (Definiţia 3.1). *Fie* $\mathbb{T}$ *o scală temporală şi* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Funcţia continuă* $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *este o pondere* α*-Steffensen–Popoviciu pentru* g *pe* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *(abreviat, pondere* α*-SP) dacă*

$$\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t > 0 \quad \text{şi} \quad \int_a^b f(g(t))^+ w(t)\Diamond_\alpha t \geq 0 \tag{6}$$

pentru fiecare $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ *funcţie continuă şi convexă, unde* $m = \inf_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} g(t)$ *şi* $M = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} g(t)$*.*

Sunt generalizate unele rezultate datorate lui *T. Popoviciu* care permit exemplificarea acestor categorii de ponderi. Astfel, se observă că aceste ponderi pot lua şi valori negative, pe intervalul de definiţie, dacă îndeplinesc anumite condiţii de pozitivitate finală (vezi Teorema completă a lui Jensen cu ponderi). Teorema 3.5 afirmă că ponderile α-Steffensen–Popoviciu sunt şi ponderi α-Hermite–Hadamard. Cu alte cuvinte, membrul drept al inegalităţii Hermite–Hadamard este verificat de toate ponderile care verifică membrul stâng.

O extindere a inegalităţii Hermite–Hadamard pentru un anumit tip de funcţii care verifică o proprietate mai slabă de simetrie, funcţiile (g, w, α)-simetrice, este prezentată în Secţiunea 3.

Definiţia 4. (Definiţia 3.3). *Fie* $\mathbb{T}$ *o scală temporală,* $a, b \in \mathbb{T}$*,* $m, M \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \in [0, 1]$*,* $g \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, [m, M])$ *şi* $w \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *o pondere* α*-Steffensen–Popoviciu pentru* g *pe* $[a, b]_{\mathbb{T}}$*. Spunem că funcţia* $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ *este* (g, w, α)*-simetrică pe* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(i) $\frac{M - x_{g,w,\alpha}}{M-m} f(m) + \frac{x_{g,w,\alpha} - M}{M-m} f(M) = f(x_{g,w,\alpha})$;

(ii) $\int_a^b f(g(t))w(t)\Diamond_\alpha t = f(x_{g,w,\alpha})\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t$.

Aici $x_{g,w,\alpha} = \left(\int_a^b g(t)w(t)\Diamond_\alpha t\right) / \left(\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t\right)$.

Apoi, exemplificăm câteva din aceste rezultate, în cazul $\alpha = 1/2$, care ne dă inegalităţi similare celor clasice de pe dreapta reală.

Rezultatele noi din acest Capitol sunt publicate în lucrările [9], [10], [14] şi [17].

4. Aplicaţii ale inegalităţii Hermite–Hadamard

Capitolul 4 surprinde câteva din multiplele aplicaţii ale Inegalităţii Hermite–Hadamard pentru scale temporale, cum ar fi Inegalitatea lui Hölder şi Inegalitatea lui Ky Fan, şi prezintă câteva generalizări ale acestor inegalităţi, în contextul scalelor temporale.

Folosind Teorema completă cu ponderi a lui Jensen, putem obţine o variantă îmbunătăţită a inegalităţii lui Hölder.

Teorema 4. (Inegalitatea lui Hölder). *Fie* $\mathbb{T}$ *o scală temporală,* $a < b \in \mathbb{T}$*,* $f, g \in C([a,b]_\mathbb{T}, [0,+\infty))$ *şi* $w \in C([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *astfel încât* wg^q *este o pondere* α*-SP pentru* $fg^{-q/p}$ *pe* $[a,b]_\mathbb{T}$*, unde* p *şi* q *sunt conjugaţii Hölder (adică,* $1/p + 1/q = 1$ *şi* $p > 1$*). Atunci avem*

(7)
$$\int_a^b w(t)f(t)g(t)\Diamond_\alpha t \le \left(\int_a^b w(t)f^p(t)\Diamond_\alpha t\right)^{1/p}\left(\int_a^b w(t)g^q(t)\Diamond_\alpha t\right)^{1/q}.$$

În prima Secţiune, se consideră o funcţie care ne conduce la găsirea unei îmbunătăţiri a inegalităţii lui Hölder, folosind proprietăţiile sale de monotonie. Mai precis, cu notaţiile de mai sus, se defineşte funcţia $h : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$h(x,y) = \left(\int_x^y w(t)f^p(t)\Diamond_\alpha t\right)^{1/p}\left(\int_x^y w(t)g^q(t)\Diamond_\alpha t\right)^{1/q} - \int_x^y w(t)f(t)g(t)\Diamond_\alpha t. \tag{8}$$

Câteva consecinţe ale inegalităţii lui Hölder, altfel dificil de obţinut, sunt incluse aici.

În Secţiunea 2 se definesc mediile aritmetice, geometrice şi armonice ponderate generalizate ale unei funcţii definite pe o scală temporală.

Definiţia 5. (Definiţia 4.1). *Fie* $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie continuă şi pozitivă şi* w *o pondere. Definim:*

(i) *media aritmetică ponderată generalizată a funcţiei* x *pe intervalul* $[a,b]_\mathbb{T}$ *de pondere* w*:*

$$A_{[a,b]}(x,w,\alpha) = \frac{\int_a^b w(t)x(t)\Diamond_\alpha t}{\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t}; \tag{9}$$

(ii) *media geometrică ponderată generalizată a funcţiei x pe intervalul $[a,b]_{\mathbb{T}}$ de pondere w:*

$$G_{[a,b]}(x,w,\alpha) = \exp\left(\frac{\int_a^b w(t)\ln(x(t))\Diamond_\alpha t}{\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t}\right); \tag{10}$$

(iii) *media armonică ponderată generalizată a funcţiei x pe intervalul $[a,b]_{\mathbb{T}}$ de pondere w:*

$$H_{[a,b]}(x,w,\alpha) = \frac{\int_a^b w(t)\Diamond_\alpha t}{\int_a^b w(t)/x(t)\Diamond_\alpha t}. \tag{11}$$

Folosind aceste definiţii, se demonstrează două variante ale inegalităţii lui Ky Fan, care utilizează ambii membrii ai inegalităţii Hermite–Hadamard.

Teorema 5. (Teorema 4.4). *Fie $x : \mathbb{T} \to [m,M]$ o funcţie continuă şi pozitivă astfel încât $0 < m \le x(t) \le M \le \gamma/2$, $\gamma > 0$ şi $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ o pondere α-Steffensen–Popoviciu pentru x pe $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Atunci*

$$\begin{aligned}\frac{A_{[a,b]}(x,w,\alpha)}{G_{[a,b]}(x,w,\alpha)} &\ge \left(\frac{A_{[a,b]}(x,w,\alpha)}{G_{[a,b]}(x,w,\alpha)}\right)^{M^2/(\gamma-M)^2} \ge \frac{A_{[a,b]}(\gamma-x,w,\alpha)}{G_{[a,b]}(\gamma-x,w,\alpha)}\\ &\ge \left(\frac{A_{[a,b]}(x,w,\alpha)}{G_{[a,b]}(x,w,\alpha)}\right)^{m^2/(\gamma-m)^2} \ge 1.\end{aligned} \tag{12}$$

În particular,

$$\frac{A_{[a,b]}(x,w,\alpha)}{A_{[a,b]}(\gamma-x,w,\alpha)} \ge \frac{G_{[a,b]}(x,w,\alpha)}{G_{[a,b]}(\gamma-x,w,\alpha)}.$$

Următoarea teoremă foloseşte în demonstraţie partea dreaptă a inegalităţii Hermite–Hadamard.

Teorema 6. *Fie $x : [a,b]_{\mathbb{T}} \to [m,M]$ o funcţie continuă şi pozitivă astfel încât $0 < m \le x(t) \le M \le \frac{\gamma}{2}$, $\gamma > 0$ şi $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ o pondere α-Hermite–Hadamard pentru x pe $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Atunci*

(13)

$$\left(\frac{\gamma-m}{m^{\frac{m^2}{(\gamma-m)^2}}}\right)^{\left(M-A_{[a,b]}(x,w,\alpha)\right)/(M-m)} \cdot \left(\frac{\gamma-M}{M^{\frac{m^2}{(\gamma-m)^2}}}\right)^{\left(A_{[a,b]}(x,w,\alpha)-m\right)/(M-m)} \cdot G_{[a,b]}(x,w,\alpha)^{m^2/(\gamma-m)^2}$$
$$\leq G_{[a,b]}(\gamma-x,w,\alpha)$$
$$\leq \left(\frac{\gamma-m}{M^{\frac{M^2}{(\gamma-M)^2}}}\right)^{\left(M-A_{[a,b]}(x,w,\alpha)\right)/(M-m)} \cdot \left(\frac{\gamma-M}{M^{\frac{M^2}{(\gamma-M)^2}}}\right)^{\left(A_{[a,b]}(x,w,\alpha)-m\right)/(M-m)} \cdot G_{[a,b]}(x,w,\alpha)^{M^2/(\gamma-M)^2}.$$

Rezultatatele noi ale acestui Capitol apar în lucrările [11] şi [19].

5. Inegalităţi de tip Ostrowski şi Iyengar

Este bine cunoscut că abaterea de la media integrală, în cazul inegalităţii Hermite–Hadamard, este estimată de inegalitatea lui Ostrowski (pentru membrul stâng) şi de inegalitatea lui Iyengar (pentru membrul drept). În Capitolul 5, încercăm să generalizăm câteva inegalităţi de tip Ostrowski, prezentând mai întâi o variantă ponderată în Secţiunea 1 şi apoi două variante pentru funcţii continue, în Secţiunea 2.

Teorema 7. (Inegalitatea ponderată a lui Ostrowski). *Fie $a, b, s, t \in \mathbb{T}$ şi $a < b$, iar $p, q \in \mathbb{R}$, cu $1/p + 1/q = 1$ şi $p > 1$.*

(i) *Dacă $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ este o funcţie delta derivabilă şi $w \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}})$ o pondere pozitivă, atunci*

(14)

$$\left|f(t) - \frac{1}{\int_a^b w(s)\Delta s}\int_a^b w(s) f(\sigma(s))\Delta s\right|$$
$$\leq \frac{\|f^\Delta\|_\infty}{\int_a^b w(s)\Delta s}\int_a^b w(s)|\sigma(s)-t|\Delta s$$
$$\leq \frac{\|f^\Delta\|_\infty}{\int_a^b w(s)\Delta s}\begin{cases} \left(\int_a^b |\sigma(s)-t|^p\Delta s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (w(s))^q\Delta s\right)^{\frac{1}{q}}; \\ \|w\|_\infty \left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} - G(a,t) + G(t,b)\right]; \\ \|w\|_\infty \left(\frac{b-\sigma(a)}{2} + \left|t - \frac{b+\sigma(a)}{2}\right|\right). \end{cases}$$

(ii) *Dacă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie nabla derivabilă şi* $w \in C_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}})$ *o pondere pozitivă, atunci*

(15)

$$\begin{aligned}
&\left| f(t) - \frac{1}{\int_a^b w(s)\nabla s} \int_a^b w(s) f(\rho(s))\nabla s \right| \\
&\quad \leq \frac{\|f^\nabla\|_\infty}{\int_a^b w(s)\nabla s} \int_a^b w(s)|\rho(s) - t|\nabla s \\
&\quad \leq \frac{\|f^\nabla\|_\infty}{\int_a^b w(s)\nabla s} \begin{cases} \left(\int_a^b |\rho(s) - t|^p \nabla s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (w(s))^q \nabla s\right)^{\frac{1}{q}}; \\ \|w\|_\infty \left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} + G(a,t) - G(t,b)\right]; \\ \|w\|_\infty \left(\frac{b-\rho(a)}{2} + \left|t - \frac{b+\rho(a)}{2}\right|\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Teoremele de tip Ostrowski pentru două funcţii continue sunt următoarele.

Teorema 8. (Teorema 5.6). *Fie* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue pe* $\mathbb{T}$, *ale căror derivate delta şi nabla sunt mărginite (i.e.* $\|f^\Delta\|_\infty$, $\|g^\Delta\|_\infty$, $\|f^\nabla\|_\infty$, $\|g^\nabla\|_\infty < \infty$*). Atunci*

$$\begin{aligned}
&\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(t) \int_a^b f(s)\lozenge_\alpha s + f(t) \int_a^b g(s)\lozenge_\alpha s \right] \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\{\alpha[|g(t)|\|f^\Delta\|_\infty + |f(t)|\|g^\Delta\|_\infty] \\
&\qquad + (1-\alpha)[|g(t)|\|f^\nabla\|_\infty + |f(t)|\|g^\nabla\|_\infty]\} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{t - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 + (1-2\alpha)\frac{G(t,b) - G(a,t)}{(b-a)^2} \right] (b-a),
\end{aligned}$$

pentru oricare $t \in \mathbb{T}$, *unde* G *este măsura de granulozitate.*

Teorema 9. (Teorema 5.7). *Fie* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *funcţii continue pe* $\mathbb{T}$, *ale căror derivate delta şi nabla sunt mărginite. Atunci*

$$\begin{aligned}
&\left| f(t)g(t) - \frac{1}{b-a} \left[g(t) \int_a^b f(s)\lozenge_\alpha s \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + f(t) \int_a^b g(s)\lozenge_\alpha s \right] + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s)g(s)\lozenge_\alpha s \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{b-a}[\alpha\|f^\Delta\|_\infty + (1-\alpha)\|f^\nabla\|_\infty] \\
&\qquad \cdot [\alpha\|g^\Delta\|_\infty + (1-\alpha)\|g^\nabla\|_\infty] \int_a^b |t-s|^2 \lozenge_\alpha s,
\end{aligned}$$

pentru toţi $t \in \mathbb{T}$, *cu* $a \leq t \leq b$.

În Secţiunea 3, demonstrăm o variantă diamant-α a inegalităţii lui Iyengar, pentru funcţii diamant-α integrabile. În plus, nu impunem condiţii de diferenţiabilitate delta, nabla sau diamant-α pentru funcţiile respective, aşa cum se cere în majoritatea variantelor inegalităţii lui Iyengar (inclusiv în ceea originală).

Teorema 10. (Inegalitatea lui Iyengar pentru scale temporale). *Fie $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ o funcţie din $C_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}}) \cap C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}})$. Presupunem că*

$$\frac{a+b}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{2M}, \frac{a+b}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{2M} \in \mathbb{T}$$

şi pentru toţi $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, există $M > 0$ astfel încât

$$|f(t) - f(a)| \le M(t-a) \quad \text{şi} \quad |f(t) - f(b)| \le M(b-t). \tag{16}$$

Atunci

$$\left| \int_a^b f(t) \Diamond_\alpha t - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \le \frac{M(b-a)^2}{4} - \frac{(f(b)-f(a))^2}{4M} + (1-2\alpha) M G(a,b). \tag{17}$$

Tot în această Secţiune apare şi o variantă generalizată a acestei inegalităţi.

Teorema 11. (Inegalitatea generalizată a lui Iyengar pentru scale temporale). *Fie $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ o funcţie din $C_{ld} \cap C_{rd}$ pe $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Presupunem că pentru toţi $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ există $M > m$ astfel încât*

$$m \le \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \le M \quad \text{şi} \quad m \le \frac{f(t)-f(b)}{b-t} \le M \tag{18}$$

şi

$$\frac{a+b}{2} - \frac{f(b)-f(a)-\frac{M+m}{2}(b-a)}{M-m}, \quad \frac{a+b}{2} + \frac{f(b)-f(a)-\frac{M+m}{2}(b-a)}{M-m} \in \mathbb{T}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f(t) \Diamond_\alpha t - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - (1-2\alpha)G(a,b) \right| \\ &\le \frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)} \\ &\quad + (1-2\alpha)G(a,b). \end{aligned} \tag{19}$$

Secţiunea 4 conţine şi o variantă delta şi una nabla a inegalităţilor lui Steffensen, care ne permit să obţinem alte variante ale inegalităţii lui Iyengar.

Teorema 12. (Inegalităţile lui Steffensen pentru integrale delta). *Fie $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ o funcţie delta integrabilă astfel încât $\lambda = \int_a^b g(t)\Delta t \in (0, b-a]$. Atunci următoarele două condiţii sunt echivalente:*

(i) $0 \le \int_a^x g(t)\Delta t \le x - a$ *şi* $0 \le \int_x^b g(t)\Delta t \le b - x$, *pentru toţi* $x \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ *;*

(ii) $\int_a^{a+\lambda} f(t)\Delta t \le \int_a^b f(t)g(t)\Delta t \le \int_{b-\lambda}^b f(t)\Delta t$, *pentru toate funcţiile crescătoare* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$.

În lucrare este prezentată şi varianta nabla a acestei Teoreme. Acestea ne permit să obţinem următoarea teoremă.

Teorema 13. (Teorema 5.14). *Fie* $\alpha \in [0,1]$ *şi* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *o funcţie diamant-*α *derivabilă şi diamant-*α *integrabilă astfel încât*

$$\frac{a+b}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{2M}, \frac{a+b}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{2M} \in \mathbb{T}$$

şi

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}, \frac{f(b)-f(t)}{b-t} \in [-M, M],$$

pentru fiecare $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. *Atunci*

(20)
$$\begin{aligned}\frac{(f(b)-f(a))^2}{4M} - \frac{M(b-a)^2}{4} - 2(1-2\alpha)MG\left(\frac{a+b}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{2M}, b\right) \\ \le \int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\ \le \frac{M(b-a)^2}{4} - \frac{(f(b)-f(a))^2}{4M} \\ - 2(1-2\alpha)MG\left(a, \frac{a+b}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{2M}\right).\end{aligned}$$

De o reală utilitate, pe parcursul acestui Capitol, s-a dovedit a fi funcţia G (măsura de granulozitate) definită în Capitolul 1.

Rezultatele noi ale acestui Capitol sunt publicate în lucrările [8] şi [18].

6. Scale temporale multidimensionale

Capitolul 6 urmăreşte generalizarea derivatelor şi integralelor pe scale temporale n-dimensionale. În Secţiunea 1 sunt definite derivatele dinamice parţiale delta, nabla şi diamant-α.

Apoi, în ceea de-a doua Secţiune, se defineşte noţiunea de "segment omogen" generalizat, care permite introducerea noţiunii de integrală diamant-α Darboux multiplă şi apoi de integrală diamant-α Riemann multiplă şi se arată că cele două noţiuni sunt identice.

Definiţia 6. (Definiţia 6.3). *Funcţia* f *se numeşte* $\Diamond_\alpha$*-integrabilă Darboux pe* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *dacă* $L(f) = U(f)$. *Notăm această valoare cu* $\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(t)\Diamond_\alpha t$ *şi o numim integrala diamant-*α *Darboux.*

Definiţia 7. (Definiţia 6.4). *Funcţia f se numeşte $\Diamond_\alpha$-integrabilă Riemann pe $[a,b]_{\mathbb{T}}$ dacă există numărul real I cu următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $P \in \mathcal{P}(a,b)$ implică $|S(f,P,\xi,\alpha) - I| < \varepsilon$ pentru orice alegere a sistemului de vectori ξ. Numărul I cu această proprietate se numeşte integrala diamant-α Riemann.*

Câteva teoreme care ne permit să dezvoltăm un calcul pe scale temporale n-dimensionale sunt prezentate, de asemenea, în acest Capitol. În Secţiunea 3, se defineşte noţiunea de "segment eterogen" generalizat şi se introduce integrala Darboux şi Riemann generalizată. În acest caz, pentru vectorul $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in [0,1]^n$, integrala diamant-$\alpha$ multiplă generalizată se introduce iterativ ca o combinaţie convexă.

În Secţiunea 4 demonstrăm o formulă de tip Leibniz-Newton pentru ambele tipuri de integrale introduse, în cazul când acestea se reduc la cazul unidimensional.

Teorema 14. (Teorema 6.11). *Fie $\mathbb{T}$ este o scală temporală unidimensională şi $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ o funcţie delta integrabilă, în sensul Definiţiilor 6.4 şi 6.6, care admite antiderivate delta. Atunci*

$$\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a), \tag{21}$$

unde F este o delta antiderivată a lui f.

Secţiunea 5 prezintă o generalizare a inegalităţilor prezentate în celelalte capitole, de la scale temporale unidimensionale, la scale temporale multidimensionale. Astfel, demonstrăm, mai întâi, Inegalitatea lui Jensen cu variabile multiple şi obţinem apoi alte două inegalităţi interesante, printre care şi Inegalitatea generalizată a lui Čebyšev.

Teorema 15. (Inegalitatea generalizată a lui Jensen cu variabile multiple). *Fie $\mathbb{T}$ o scală temporală, $a, b \in \mathbb{T}$ şi $f : S \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi convexă. Fie $h, g_1, ..., g_n \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ astfel încât $\int_a^b |h(t)|\Diamond_\alpha t > 0$ şi $g_1([a,b]) \times ... \times g_n([a,b]) \subset S$. Atunci*

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\int_a^b |h(t)|g_1(t)\Diamond_\alpha t}{\int_a^b |h(t)|\Diamond_\alpha t}, ..., \frac{\int_a^b |h(t)|g_n(t)\Diamond_\alpha t}{\int_a^b |h(t)|\Diamond_\alpha t}\right) \\ &\qquad \leq \frac{\int_a^b |h(t)| f\left(g_1(t), ..., g_n(t)\right)\Diamond_\alpha t}{\int_a^b |h(t)|\Diamond_\alpha t}. \end{aligned} \tag{22}$$

În ultima parte a Secţiunii, demonstrăm Teorema lui Fubini pe scale temporale şi cu ajutorul ei obţinem o variantă a Inegalităţii Hermite–Hadamard pentru integrale multiple.

Teorema 16. (Inegalitatea Hermite–Hadamard pentru integrale multiple). *Cu notaţiile şi presupunerile de mai sus, avem*

(23)

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_{g_1,w_1,\alpha_1}+\ldots+x_{g_n,w_n,\alpha_n}}{n}\right)\\
&\le \frac{\int_{a_n}^{b_n}\ldots\int_{a_1}^{b_1} w_1(t_1)\cdot\ldots\cdot w_n(t_n) f\left(\frac{g_1(t_1)+\ldots+g_n(t_n)}{n}\right)\Diamond_{\alpha_1}t_1\ldots\Diamond_{\alpha_n}t_n}{\prod_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} w_i\Diamond_{\alpha_i}t_i}\\
&\le \frac{M-\frac{x_{g_1,w_1,\alpha_1}+\ldots+x_{g_n,w_n,\alpha_n}}{n}}{M-m}f(m)\\
&\quad+\frac{\frac{x_{g_1,w_1,\alpha_1}+\ldots+x_{g_n,w_n,\alpha_n}}{n}-m}{M-m}f(M).
\end{aligned}
$$

Rezultatele noi din acest Capitol sunt publicate în lucrarea [12].

Bibliografie

[1] B. Aulbach and S. Hilger, A unified approach to continuous and discrete dynamics, in *Qualitative theory of differential equations (Szeged, 1988)*, 3756, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **53**, North-Holland, Amsterdam, (1990).

[2] M. Bohner and G. Sh. Guseinov, Multiple Lebesque integration on time scales, *Advances in Difference Equations*, vol. 2006, Article ID 26391, pages 1-12, (2006).

[3] M. Bohner and T. Matthews, Ostrowski inequalities on time scales, *J. Inequal. Pure and Appl. Math,* **9** (1) (2008), Art. 6, [ONLINE: jipam.vu.edu.au/article.php?sid=940].

[4] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales, An introduction with Applications*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (2001).

[5] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (2003).

[6] P. L. Čebyšev, *Polnoe Sobranie Sočineniǐ Completed Collected Works*, vol. **3** (pp 128-131), Moscow-Leningrad, 1948.

[7] C. C. Dinu, Representation of max-plus convex sets in terms of extreme points and extreme generators, *Proceedings of CERCMS International Conference of Young Scientists affiliated to CASC (2006), Chişinău, Moldova, September 11-15*, pages 69-74, ISBN 978-9975-70-677-3.

[8] C. Dinu, Ostrowski type inequalities on time scales, *Annals of the University of Craiova*, Math. Comp. Sci. Ser. **34** (2007), pages 43-58.

[9] C. Dinu, Generalizarea inegalităţii Hermite–Hadamard pe scale temporale, *Conferinţa Studenţească de Matematică "Alexandru Myller"*, Iaşi, 1-5 iulie 2008.

[10] C. Dinu, Hermite–Hadamard inequality on time scales, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2008, Article ID 287947, 24 pages, (2008).

[11] C. C. Dinu, Ky Fan inequality on time scales, *Conference Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2008)*, Chişinău, October 1-4, (2008).

[12] C. C. Dinu, Integrale diamant-α multiple pe scale temporale n-dimensionale, *A XII-a Conferinţă Anuală a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România (S.S.M.R.)*, Bacău, 17-19 octombrie 2008.

[13] C. Dinu, Convex functions on time scales, *Annals of the University of Craiova*, Math. Comp. Sci. Ser. **35** (2008), (acceptată).
[14] C. Dinu, A weighted Hermite–Hadamard inequality for Steffensen–Popoviciu and Hermite–Hadamard weights on time scales, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius", Constanţa*, Ser. Mat., **17** (2009) (acceptată).
[15] C. Dinu, Lengths of time scales parametrized regular curve's arcs, *Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Piteşti*, Ser. Mat.-Inf., **14** (2008), (acceptată).
[16] C. Dinu, Diamond-α tangent lines of time scales parametrized regular curves, (trimisă spre publicare).
[17] C. Dinu, Hermite–Hadamard inequality for (w, g, α)-symmetric functions on time scales, (trimisă spre publicare).
[18] C. Dinu, Iyengar's inequality on time scales, (trimisă spre publicare).
[19] C. Dinu, Some improvments of Hölder's inequality on time scales, (trimisă spre publicare).
[20] S. S. Dragomir and A. Mcandrew, Refinements of the Hermite–Hadamard inequality for convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math,* **6** (5) (2005), Art. 140, [ONLINE: jipam.vu.edu.au/article.php?sid=614].
[21] S. S. Dragomir and F.P. Scarmozzino, On the Ky Fan inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, **269** (2002), 129-136.
[22] A. Florea and C. P. Niculescu, A Hermite–Hadamard inequality for convex-concave symmetric functions, *Bull. Soc. Sci. Math. Roum.* **50** (98), no. **2**, (2007), 149-156.
[23] A. Florea and C. P. Niculescu, A note on the Ky Fan inequality, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, vol. **5** (2002), no. 4, 234-244.
[24] S. Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten.* PhD thesis, Universität Würzburg, (1988).
[25] K. S. K. Iyengar, *Note on an inequality*, Math. Student, **6** (1938), 75-76.
[26] Z. Liu, Note on Iyengar's inequality, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.* **16** (2005), 29-35.
[27] C. P. Niculescu, *Calculul integral al funcţiilor de mai multe variabile. Teorie şi aplicaţii*, Ed. Universitaria, Craiova, (2002).
[28] C. P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex functions and their applications. A contemporary aproach*, CMS Books in Mathematics vol. **23**, Springer-Verlag, New York, (2006).
[29] A. M. Ostrowski, Über die Absolutabweichung einer differentiebaren Funktion von ihrem Integralmitelwert, *Comment. Math. Helv.*, **10** (1938), 226–227.
[30] B. G. Pachpatte, A note on Ostrowski like inequalities, *J. Inequal. Pure and Appl. Math,*, **6** (4) (2005), Art. 114.
[31] T. Popoviciu, Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur (IX), *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.*, **43** (1941), 85-141.
[32] M. R. Sidi Ammi, R. A. C. Ferreira and D. F. M. Torres, Diamond-α Jensen's inequality on time scales and applications, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2008, Article ID 576876, 13 pages, (2008).
[33] O. Stolz, *Grunzuge der Differential und Integralrechnung*, vol. 1, Teubner, Leipzig, (1893).
[34] L.-C. Wang, Two mappings related to Hölder's inequality, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.* **15** (2004), 91-96.

Universitatea din Craiova
Departamentul de Matematică
Str. Al. I. Cuza, nr. 13, Craiova RO-200585, Romania
E-mail address: `c.dinu@yahoo.com`