Rezumatul tezei de doctorat

"Ecuaţii eliptice neliniare şi aplicaţii",

a doctorandului Ionică Andrei

Teza are ca subiect de studiu ecuaţiile cu derivate parţiale, abordând diverse probleme variaţionale cu operatori de tip $p(x)$ - Laplacian şi inegalităţi hemivariaţionale. Majoritatea rezultatelor obţinute sunt de existenţă a soluţiei, dar avem şi rezultate care atestă lipsa soluţiei. De asemenea, sunt prezentate şi probleme pentru care stabilim fie unicitatea soluţiei, fie multiplicitatea ei.

Teza este alcatuită din nouă capitole dintre care Capitolul 1 a fost rezervat Introducerii. Deoarece cadrul funcţional de lucru în majoritatea capitolelor (este vorba despre capitolele 3-7) este cadrul spaţiilor Lebegue-Sobolev generalizate, s-a impus introducerea unui capitol în care să fie prezentate mai în detaliu. Astfel, în Capitolul 2 sunt prezentate câteva note istorice, cele mai importante proprietăţi ale lor şi câteva rezultate semnificative de actualitate.

Capitolul 3 se bazează pe articolul *"Existence theorems for some classes of boundary value problems involving the* $p(x)$*-Laplacian "* care a apărut în revista *"Nonlinear Analysis: Modelling and Control"*. În prima secţiune considerăm următoarea problemă

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u &= \lambda f(x,u), \quad \text{în } \Omega\,, \\ \quad u &= 0, \quad \text{pe } \partial\Omega\,, \\ 0<\lambda &\leq a\,, \end{cases} \tag{1}$$

unde Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$, $a>0$ este o constantă dată şi f satisface următoarele condiţii:

(F_1) f este o funcţie Carathéodory, adică măsurabilă pe Ω şi continuă pentru orice $u\in\mathbb{R}$, cu $f(x,0)\neq 0$ pe orice submulţime a lui Ω de măsură pozitivă;

(F_2) $\mid f(x,u)\mid\leq C_1+C_2\mid u\mid^{q(x)-1}$, pentru orice $x\in\Omega$ a.p.t. şi orice $u\in\mathbb{R}$, cu constantele $C_1\geq 0$, $C_2\geq 0$ şi $1<p(x)\leq q(x)<p^\star(x)$, unde

$$p^\star(x)=\begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{dacă } p(x)<N, \\ +\infty, & \text{dacă } p(x)\geq N; \end{cases}$$

(F_3) există constantele $b_1\geq 0, b_2\geq 0, 1\leq\gamma<p(x)<\nu$ astfel incât, pentru $x\in\Omega$ a.p.t. şi orice $u\in\mathbb{R}$,

$$f(x,u)u-\nu\int_0^u f(s,\tau)d\tau\geq -b_1-b_2\mid u\mid^\gamma.$$

Vom demonstra că dacă funcţia $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface condiţiile (F_1)-(F_3) şi există o funcţie $\beta\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ astfel încât, pentru constantele $0<\rho<r$, $\sigma>0$, sunt verificate următoarele proprietăţi:

(β_1) $\beta(0)=\beta(r)=0$;

(β_2) $\rho^{\sigma+1} \geq q(x) a_2 \frac{||u||^{q^+}}{||u||^{q(x)}}$ şi $\dfrac{\sigma+1}{q(x)} \beta(\rho) = a_1$;

(β_3) $\lim\limits_{|t| \to \infty} \beta(t) = +\infty$;

(β_4) $\beta'(t) < 0$ dacă şi numai dacă $t < 0$ sau $\rho < t < r$,

atunci, pentru $a > 0$, avem următoarea alternativă :

ori

(i) $a > 0$ este o valoare proprie a problemei (1) care corespunde funcţiei proprii $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ şi care verifică

$$\alpha \leq -\int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,t) dt dx + \frac{1}{ap(x)} \|u\|^{p(x)} \leq a_1 + \alpha$$

ori

(ii) putem găsi un număr pozitiv s cu

$$\rho < s < r, \tag{2}$$

care determină o soluţie proprie $(u, \lambda) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times (0, a]$ a problemei (1) prin relaţiile

$$\|u\| = s^{-\sigma/q(x)} (-\beta'(s))^{1/q(x)}, \tag{3}$$

$$\lambda^{-1} = a^{-1} + s^{(q(x)+\sigma p(x))/q(x)} (-\beta'(s))^{(q(x)-p(x))/q(x)}, \tag{4}$$

$$\alpha \leq \frac{s^{q(x)+1}}{q(x)} \|u\|^{q(x)} + \frac{\sigma+1}{q(x)} \beta(s) - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,t) dt dx + \frac{1}{ap(x)} \|u\|^{p(x)} \leq a_1 + \alpha. \tag{5}$$

În a doua secţiune a acestui capitol studiem problema:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u & = \lambda \mid u \mid^{p(x)-2} u + \mid u \mid^{q(x)-2} u, \quad \text{în } \Omega\,, \\ u & = 0, \quad \text{pe } \partial\Omega\,, \\ u & \not\equiv 0, \quad \text{în } \Omega\,. \end{cases} \tag{6}$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni constă în faptul că dacă

$$\lambda < \lambda_1(-\Delta_{p(x)}) := \inf \left\{ \int_\Omega \mid \nabla u \mid^{p(x)}; u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\,, u \neq 0\,, \|u\|_{L^{p(x)}} = 1 \right\}$$

şi $1 < p(x) < q(x) < p^\star(x)$, atunci problema (8) are o soluţie slabă.

În Capitolul 4 studiem existenţa şi multiplicitatea soluţiilor problemelor cu valori pe frontieră de tipul

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^{p(x)}) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

unde Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ cu frontiera netedă $\partial\Omega$, în timp ce f şi a satisfac următoarele condiţii:

$$(F1) \qquad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Fie
$$C_+(\overline{\Omega}) = \{h; h \in C(\overline{\Omega}), h(x) > 1 \text{ pentru orice } x \in \overline{\Omega}\}.$$
Pentru $h \in C_+(\overline{\Omega})$, fie
$$h^- = ess \inf_{x \in \Omega} h(x), \quad h^+ = ess \sup_{x \in \Omega} h(x).$$

$(F2)$ Există constantele nenegative a_1, a_2 astfel încât
$$|f(t)| \leq a_1 + a_2|t|^s, t \in \mathbb{R}.$$
unde $p \in C_+(\overline{\Omega})$, $s + 1 < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ dacă $N > p(x)$, şi $0 \leq s < \infty$ dacă $N \leq p(x)$.
$(F3)$ Există $\theta \in (0, \frac{1}{p^+})$ şi $t_0 \geq 0$ astfel încât pentru $|t| \geq t_0$
$$\theta t f(t) \geq F(t) > 0,$$
unde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.
$(F4)$ F este o funcţie pară.

$$(A1) \qquad a \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

$(A2)$ Există constantele b_1, $b_2 > 0$ astfel încât
$$b_1 \leq \lim_{t\to\infty} \inf a(t) \leq \lim_{t\to\infty} \sup a(t) \leq b_2.$$
$(A3)$ $a(t)t^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}$ este strict crescătoare în funcţie de t şi
$\lim_{t\to 0^+} a(t)t^{\frac{p(x)-1}{p(x)}} = 0$.
Primul rezultat principal al acestui capitol afirmă că dacă funcţia a satisface $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, f satisface $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, $p(x) \geq 2$ şi $b_2\theta < \frac{b_1}{p^+}$, atunci Problema (7) posedă un şir nemărginit de soluţii slabe.
Pentru cel de al doilea rezultat principal vom introduce şi următoarele condiţii:
$(A4)$ Există constantele c_1, $c_2 > 0$ şi b_1, $b_2 > 0$ astfel încât pentru orice $t > 0$
$$c_1 + b_1 t^{p(x)-2} \leq t^{p(x)-2}a(t^{p(x)}) \leq c_2 + b_2 t^{p(x)-2}.$$
$(F6)'$
$$\lim_{|t|\to+\infty} \sup \frac{p(x)F(t)}{|t|^{p(x)}} < \lambda_1(g(p(x))c_1 + b_1),$$
unde λ_1 este prima valoare proprie a lui $(-\Delta_{p(x)}, W_0^{1,p(x)}(\Omega))$ şi $g = \chi_{\{2\}}$ semnifică funcţia caracteristică a mulţimii $\{2\}$.

$$(F7)' \qquad (c_2 + g(p(x))b_2)\mu_i < \lim_{t\to 0} \inf \frac{f(t)}{t} \leq \lim_{t\to 0} \sup \frac{f(t)}{t} < (c_1 + g(p(x))b_1)\mu_{i+1}.$$

Dacă a satisface $(A1)$, $(A3)$, $(A4)$, f satisface $(F1)$, $(F2)$, $(F6)'$, $(F7)'$, iar $p(x) \geq 2$, atunci Problema (7) are cel puţin două soluţii netriviale.

Capitolul 5 se bazează pe articolul *"Multiplicity results for nonlinear eigenvalue problems on unbounded domains"* care a apărut în revista *"Mathematica (Cluj)"*.
În acest capitol studiem probleme eliptice de tipul

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda f(x,u(x)) & \text{în } \Omega, \\ a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot n + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \mu g(x,u(x)) & \text{pe } \Gamma, \\ u \neq 0 & \text{în } \Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\mu}$}$$

unde λ, $\mu > 0$, în timp ce n reprezintă normala exterioară.

De asemenea, considerăm ipotezele:
$(F1)$ Fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie Carathéodory astfel încât $f(\cdot, 0) = 0$ şi

$$|f(x,s)| \leq f_0(x) + f_1(x)|s|^{r-1},$$

unde $p^+ < r < \frac{p^+N}{N-p^+}$, şi f_0, f_1 sunt funcţii măsurabile care satisfac

$$0 < f_0(x) \leq C_f w_1(x), \text{ şi } 0 \leq f_1(x) \leq C_f w_1(x) \quad \text{a.p.t. în } \Omega,$$

$$f_0 \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega; w_1^{\frac{1}{1-r}});$$

$(F2)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{f_0(x)|s|^{p^+-1}} = 0, \quad \text{uniform pentru orice } x \in \Omega;$$

$(F3)$ $\limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{f_0(x)|s^{p^+}|} F(x,s) \leq 0$ uniform pentru orice $x \in \Omega$ şi $\max_{|s|\leq M} F(\cdot, s) \in L^1(\Omega)$ pentru orice $M > 0$, unde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$;
$(F4)$ există $u_0 \in E$ astfel încât $\int_\Omega F(x, u_0(x))dx > 0$.
$(G1)$ Fie $g : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie Carathéodory astfel încât $g(\cdot, 0) = 0$ şi

$$|g(x,s)| \leq g_0(x) + g_1(x)|s|^{m-1},$$

unde $p^+ \leq m < p^+ \cdot \frac{N-1}{N-p^+}$, şi g_0, g_1 sunt funcţii măsurabile care satisfac

$$0 < g_0(x) \leq C_g w_2(x) \quad \text{şi} \quad 0 \leq g_1(x) \leq C_g w_2(x), \quad \text{a.p.t. în} \quad \Gamma,$$

$$g_0 \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Gamma; w_2^{\frac{1}{1-q}});$$

$(G2)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(x,s)}{g_0(x)|s|^{p^+-1}} = 0, \quad \text{uniform pentru orice} \quad x \in \Gamma;$$

$(G3)$ $\limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{g_0(x)|s^{p^+}|} G(x,s) < +\infty$ uniform pentru orice $x \in \Gamma$ şi $\max_{|s|\leq M} G(\cdot, s) \in L^1(\Gamma)$ pentru orice $M > 0$, unde $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$.

Demonstrăm că dacă $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care verifică condiţiile $(F1) - (F4)$, atunci există un interval compact nedegenerat $[a, b] \subset [0, +\infty]$ cu următoarele proprietăţi:

i) există un număr $\sigma_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda \in [a, b]$ şi pentru orice funcţie $g : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile $(G1)-(G2)$, există $\mu_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\mu \in [0, \mu_0]$, problema $(P_{\lambda,\mu})$ are cel puţin o soluţie netrivială în E cu norma mai mică decât σ_0;

ii) pentru orice $\lambda \in [a, b]$ şi pentru orice funcţie $g : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile $(G1) - (G3)$, există $\mu_1 > 0$ astfel încât pentru orice $\mu \in [0, \mu_1]$, problema $(P_{\lambda,\mu})$ are cel puţin două soluţii netriviale în E.

Capitolul 6 se bazează pe articolul *"Existence and non-existence results for elliptic exterior problems with nonlinear boundary conditions"* publicat în revista *"Analele Universităţii Ovidius din Constanţa"*.

În acest capitol considerăm că Ω este un domeniu neted exterior din $\mathbb{R}^N$, adică, Ω este complementara unui domeniu mărginit cu frontiera de clasă $C^{1,\delta}$ $(0 < \delta < 1)$ şi presupunem că $a \in L^\infty(\Omega) \bigcap C^{0,\delta}(\overline{\Omega})$ este o funcţie pozitivă, şi $b \in L^\infty(\Omega) \bigcap C(\Omega)$ o funcţie nenegativă. Studiem problema

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u = \lambda g(x)|u|^{r-2}u & \text{în } \Omega, \\ a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\partial_\nu u + b(x)|u|^{p(x)-2}u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

unde $p \in C_+(\overline{\Omega})$, λ este un parametru real şi ν este vectorul unitate al normalei exterioare pe $\partial\Omega$. De asemenea, considerăm ipotezele

$(H1)$ $g \in L^\infty(\Omega) \bigcap L^{p_0}(\Omega)$, cu $p_0 := p^*/(p^* - r)$, $p^+ < r < q < p^*$, este o funcţie pozitivă, unde $p^* := Np^+/(N - p^+)$;

$(H2)$ b este o funcţie continuă pozitivă pe $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstrăm că dacă sunt verificate ipotezele $(H1)$ şi $(H2)$, atunci există $\lambda^* > 0$ cu următoarele proprietăţi:

(i) dacă $\lambda < \lambda^*$, atunci problema (8) nu are nicio soluţie slabă;

(ii) dacă $\lambda \geq \lambda^*$, atunci problema (8) are cel puţin o soluţie slabă u, care verifică

(a) $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$;

(b) $u \in C^{1,\alpha}(\Omega \cap B_R)$, $\alpha = \alpha(R) \in (0, 1)$;

(c) $u > 0$ în Ω;

(d) $u \in L^m(\Omega)$ pentru orice $p^* \leq m < \infty$ şi $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

În al doilea rezultat al capitolului considerăm condiţia $(H1)'$, care este exact ipoteza $(H1)$, cu excepţia că în loc de $p^+ < r < q < p^*$ avem

$$p^+ < q < r < p^*.$$

În acest caz demonstrăm că dacă sunt verificate ipotezele $(H1)'$ şi $(H2)$, atunci

(i) problema (8) nu are nicio soluţie slabă pentru orice $\lambda \leq 0$;

(ii) problema (8) are cel puţin o soluţie slabă u, cu proprietăţile $(a) - (d)$ de mai sus pentru orice $\lambda > 0$.

Capitolul 7 se bazează pe articolul *"Blow-up boundary solutions for a class of nonhomogeneous logistic equations"* publicat în revista *"Analele Universităţii din Craiova"*.

În acest capitol studiem ecuaţii de tipul $\Delta_{p(x)}u = g(x)f(u)$, unde Ω este un domeniu mărginit, g

este o funcţie continuă nenegativă pe Ω care este nemărginită pe Ω şi f este o funcţie neliniară, nenegativă şi crescătoare. Arătăm că ecuaţia $\Delta_{p(x)}u = g(x)f(u)$ admite o soluţie slabă local nenegativă $u \in W^{1,p(x)}_{loc}(\Omega) \cap C(\Omega)$ astfel încât $u(x) \to \infty$ atunci când $x \to \partial\Omega$ dacă $\Delta_{p(x)}w = -g(x)$ în sens slab pentru $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ şi f satisface o condiţie Keller-Osserman generalizată.

Mai exact căutăm soluţii $u \in W^{1,p(x)}_{loc}(\Omega) \cap C(\Omega)$ pentru problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = g(x)f(u) & \text{în } \Omega, \\ u(x) \to \infty & \text{când } d(x, \partial\Omega) \to 0. \end{cases} \tag{9}$$

Presupunem că funcţia g este nenegativă şi satisface următoarea condiţie:

pentru orice $x_0 \in \Omega$ care verifică $g(x_0) = 0$, există un subdomeniu

$$O \text{ cu } \overline{O} \subset \Omega \text{ care conţine pe } x_0 \text{ astfel încât } g(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in \partial O. \tag{10}$$

De asemenea, presupunem că f este neliniară şi verifică

$(F1)$ $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este funcţie crescătoare de clasă C^1 astfel încât $f(0) = 0$, şi

$(F2)$ $f(s) > 0$ pentru $s > 0$.

De asemenea, considerăm următoarea condiţie de creştere a lui f la infinit,

$$\int_1^\infty \frac{1}{(F(t))^{1/p(x)}} dt < \infty, \qquad \text{unde} \quad F(t) := \int_0^t f(s)ds, \tag{11}$$

pe care o numim condiţia Keller-Osserman generalizată.

Demonstrăm că dacă $D \subseteq \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit, $g \in C(\overline{D})$ satisface (10) pe D şi f este o funcţie care satisface condiţia Keller-Osserman, atunci problema

$$\begin{cases} div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = g(x)f(u) & \text{în } D, \\ u(x) \to \infty & \text{când } d(x, \partial D) \to 0, \end{cases} \tag{12}$$

admite o soluţie nenegativă $u \in W^{1,p(x)}_{loc}(D) \cap C^{1,\alpha}(D)$, $0 < \alpha < 1$.

Pentru următorul rezultat al acestui capitol considerăm că $g \in C(\Omega)$ verifică condiţia:

(G) Există un şir $\{D_k\}$ de domenii astfel încât

(1) $\overline{D}_k \subseteq D_{k+1}$; $k = 1, 2, ...$

(2) $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$.

(3) g satisface condiţia (10) pe fiecare D_k.

Dacă f este o funcţie care satisface condiţia Keller-Osserman şi $g \in C(\Omega)$ satisface condiţia (G), atunci problema (9) admite o soluţie explozivă nenegativă, dacă problema Dirichlet

$$\begin{cases} div(|\nabla w|^{p(x)-2}\nabla u) = -g(x), & x \in \Omega, \\ w(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

are o soluţie slabă.

Capitolul 8 se bazează pe articolul *"Nonlinear hemivariational inequalities and applications to nonsmooth mechanics"* publicat în revista *"Advances in Nonlinear Variational Inequalities"*. Scopul acestui capitol este de a stabili câteva rezultate de existenţă pentru o clasă de inegalităţi hemivariaţionale nestandard. Analiza noastră include atât cazul submulţimilor mărginite, închise şi convexe ale spaţiului Banach reflexiv real cât şi cazul submulţimilor nemărginite, închise şi convexe ale aceluiaşi spaţiu. Pentru a demonstra rezultatele principale vom utiliza "Principiul KKM" combinat cu "Alternativa Mosco". În ultima secţiune a capitolului sunt ilustrate câteva aplicaţii a rezultatelor abstracte care sunt demonstrate în acest capitol.

Pe parcursul acestui capitol, V desemnează un spaţiu Banach reflexiv real, K este o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui V şi (X, μ) va semnifica un spaţiu de măsură cu măsura finită şi pozitivă. Pentru un $p > 1$ dat vom nota cu p' exponentul conjugat al său (adică $p' = p/(p-1)$) şi presupunem că există un operator compact şi liniar T definit pe V cu valori în $L^p(X)$.

Ne concentrăm atenţia asupra inegalităţilor neliniare hemivariaţionale de tipul
(**P**) Găsim $u \in K$ astfel încât pentru orice $v \in K$

$$\Theta(u, v) + \int_X h(x, \bar{u}(x))\, j^0(x, \bar{u}(x); \bar{v}(x) - \bar{u}(x))\, d\mu \geq \int_X f(x, \bar{u}(x))(\bar{v}(x) - \bar{u}(x))\, d\mu,$$

unde $\Theta : V \times V \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie neliniară, $\bar{u}(x) := Tu(x)$ şi $h, j, f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date. Prin $j^0(x, y; l)$ înţelegem derivata Clarke generalizată a aplicaţiei $j(x, \cdot)$ în punctul $y \in \mathbb{R}$ în raport cu direcţia $l \in \mathbb{R}$ în timp ce $\partial j(x, y)$ semnifică gradientul Clarke generalizat al aplicaţiei $y \mapsto j(x, y)$ pentru un $x \in X$ fixat.

Pentru a demonstra existenţa a cel puţin unei soluţii pentru problema (**P**) admitem următoarele ipoteze:

($\mathbf{H_h}$) $h : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory (adică $h(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ este măsurabilă pentru orice $y \in \mathbb{R}$, şi $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă a.p.t. pentru $x \in X$) şi există o constantă $h_0 > 0$ astfel încât $0 \leq h(x, y) \leq h_0$, a.p.t. pentru $x \in X$ şi orice $y \in \mathbb{R}$.

($\mathbf{H_f}$) $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory şi există $C_f > 0$ şi $b \in L^{p'}(X)$ astfel încât

$$|f(x, y)| \leq b(x) + C_f |y|^{p-1}$$

a.p.t. pentru $x \in X$ şi orice $y \in \mathbb{R}$.

($\mathbf{H_\Theta}$) $\Theta : V \times V \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie neliniară care satisface câteva din condiţiile de mai jos:

($\mathbf{\Theta_1}$) $\Theta(u, u)$=0, pentru orice $u \in V$;

($\mathbf{\Theta_2}$) aplicaţia $u \mapsto \Theta(u, v)$ este slab superior semicontinuă pentru orice $v \in V$, adică,

$$\limsup_{n \to \infty} \Theta(u_n, v) \leq \Theta(u, v)$$

atunci când $u_n \rightharpoonup u$;

($\mathbf{\Theta_3}$) aplicaţia $v \mapsto \Theta(u, v)$ este convexă pentru orice $u \in V$;

($\mathbf{\Theta_4}$) $u \mapsto \Theta(u, v)$ este concavă;

($\mathbf{\Theta_5}$) Θ este o aplicaţie monotonă, în sensul că, $\Theta(u, v) + \Theta(v, u) \geq 0, \ \forall u, v \in V$.

De asemenea presupunem că $j : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface una din următoarele ipoteze:

($\mathbf{H_j^1}$) $j(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ este măsurabilă pentru orice $y \in \mathbb{R}$ şi există $k \in L^{p'}(X)$ astfel încât

$$|j(x, y_1) - j(x, y_2)| \leq k(x)|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in X, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

sau,

($\mathbf{H_j^2}$) $j(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ este măsurabilă pentru orice $y \in \mathbb{R}$, aplicaţia $j(x, \cdot)$ este local Lipschitz pentru orice $x \in X$ şi există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$|z| \leq C(1 + |y|^{p-1}), \quad \forall x \in X, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \partial j(x, y).$$

Demonstrăm că dacă avem K o submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă a lui V şi sunt satisfăcute ($\mathbf{H_h}$), ($\mathbf{H_f}$), ($\mathbf{\Theta_1}$), ($\mathbf{\Theta_2}$), ($\mathbf{\Theta_3}$) şi una din condiţiile ($\mathbf{H_j^1}$), ($\mathbf{H_j^2}$), atunci problema (**P**) are cel puţin o soluţie.

Apoi arătăm că dacă avem K o submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă a lui V şi sunt satisfăcute ($\mathbf{H_h}$), ($\mathbf{H_f}$), ($\mathbf{\Theta_1}$), ($\mathbf{\Theta_2}$), ($\mathbf{\Theta_4}$), ($\mathbf{\Theta_5}$) şi una din condiţiile ($\mathbf{H_j^1}$), ($\mathbf{H_j^2}$) , atunci există o soluţie pentru inegalitatea neliniară hemivariaţională (**P**).

La final stabilim că dacă avem K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui V şi sunt satisfăcute ($\mathbf{H_h}$), ($\mathbf{H_f}$), ($\mathbf{\Theta_1}$), ($\mathbf{\Theta_2}$), ($\mathbf{\Theta_3}$) şi una din condiţiile ($\mathbf{H_j^1}$), ($\mathbf{H_j^2}$), atunci problema (**P**) are cel puţin o soluţie, dacă există $v_0 \in K$ şi $q \geq p$ astfel încât

$$\frac{\Theta(u, v_0)}{\|u\|_V^q} \to -\infty, \qquad \text{atunci când } \|u\|_V \to \infty.$$

Capitolul 9 se bazează pe articolul *"Antiplane shear deformations of piezoelectric bodies in contact with a conductive support"* trimis spre publicare la *"Mathematiche Nachrichten"*.

În acest capitol ne concentrăm asupra rezolvării slabe a modelului mecanic descris de contactul dintre un corp piezoelectric şi un suport conductor. În acest capitol, modelăm contactul cu frecare prin o condiţie pe frontieră care implică gradientul Clarke generalizat, în timp ce condiţia electrică pe suprafaţa de contact este modelată folosind subdiferenţiala unei funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue. Formularea slabă a modelului nostru conduce la un sistem format din o inegalitate hemivariaţională şi o inegalitate variaţională. Existenţa soluţiilor slabe pentru modelul nostru va fi o consecinţă directă a faptului că o inegalitate mult mai generală, o inegalitate variaţional-hemivariaţională admite soluţii. De aceea, tratarea matematică a modelului implică teoria inegalităţilor variaţional-hemivariaţionale. Ingredientul principal în demonstraţia rezultatului de existenţă este o teoremă de punct fix pentru aplicaţii multivoce, datorată lui Tarafdar. Sub ipoteze adiţionale demonstrăm unicitatea soluţiei slabe.

Modelul matematic care descrie deformarea în contextul antiplan a unui cilindru piezoelectric care se află în contact de frecare cu o fundaţie conductoare este următorul:

Găsim u, $\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$(\mathbf{P}): \begin{cases} \operatorname{div}\,(\mu(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x}) + e(\boldsymbol{x})\nabla\varphi(\boldsymbol{x})) + f_0(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{în } \Omega, \\ \operatorname{div}\,(e(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x}) - \beta(\boldsymbol{x})\nabla\varphi(\boldsymbol{x})) = q_0(\boldsymbol{x}) & \text{în } \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{pe } \Gamma_1, \\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{pe } \Gamma_A, \\ \mu(\boldsymbol{x})\partial_\nu u(\boldsymbol{x}) + e(\boldsymbol{x})\partial_\nu\varphi(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) & \text{pe } \Gamma_2, \\ e(\boldsymbol{x})\partial_\nu u(\boldsymbol{x}) - \beta(\boldsymbol{x})\partial_\nu\varphi(\boldsymbol{x}) = q_B(\boldsymbol{x}) & \text{pe } \Gamma_B, \\ -\mu(\boldsymbol{x})\partial_\nu u(\boldsymbol{x}) - e(\boldsymbol{x})\partial_\nu\varphi(\boldsymbol{x}) \in h(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}))\partial j(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) & \text{pe } \Gamma_3, \\ e(\boldsymbol{x})\partial_\nu u(\boldsymbol{x}) - \beta(\boldsymbol{x})\partial_\nu\varphi(\boldsymbol{x}) \in \partial\phi(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi_F(\boldsymbol{x})) & \text{pe } \Gamma_3. \end{cases}$$

Suntem interesaţi să găsim soluţii slabe pentru problema (**P**).

Pentru aceasta, considerăm următoarele ipoteze:

(**H1**): $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(\Omega)$, $e \in L^\infty(\Omega)$. Există $\beta^*, \mu^* \in \mathbb{R}$ astfel încât $\beta(\boldsymbol{x}) \geq \beta^* > 0$ şi $\mu(\boldsymbol{x}) \geq \mu^* > 0$ a.p.t. în Ω.

(**H2**): $f_0 \in L^2(\Omega)$, $q_0 \in L^2(\Omega)$, $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$, $q_B \in L^2(\Gamma_B)$, $\varphi_F \in L^\infty(\Gamma_3)$.

(**H3**): $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory (adică $h(\cdot, t) : \Gamma_3 \to \mathbb{R}$ este măsurabilă, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, şi $h(\boldsymbol{x}, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, a.p.t. pe Γ_3). Există o constantă pozitivă h_0 astfel încât $0 \leq h(\boldsymbol{x}, t) \leq h_0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, a.p.t. pe Γ_3.

(**H4**): $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie măsurabilă în raport cu prima variabilă şi există $k \in L^2(\Gamma_3)$ astfel încât pentru orice $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$ şi orice $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avem

$$|j(\boldsymbol{x}, t_1) - j(\boldsymbol{x}, t_2)| \leq k(\boldsymbol{x})|t_1 - t_2|.$$

(**H5**): $\phi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţională astfel încât $\phi(\cdot, t) : \Gamma_3 \to \mathbb{R}$ este măsurabilă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $\phi(\boldsymbol{x}, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este convexă şi inferior semicontinuă a.p.t. pe Γ_3.

Demonstrăm că dacă sunt verificate condiţiile (**H1**)-(**H5**), atunci există cel puţin o soluţie pentru problema (**P**).

Trebuie menţionat că, sub ipotezele (**H1**)-(**H5**), unicitatea soluţiei slabe a Problemei (**P**) rămâne o *problemă deschisă*.

Pentru a obţine un rezultat de unicitate considerăm următoarele ipoteze:

(**H6**) există $m > 0$ astfel încât $(\eta_1 - \eta_2)(t_1 - t_2) \geq -m|t_1 - t_2|^2$, pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, orice $\eta_i \in h(\boldsymbol{x}, t_i)\partial j(\boldsymbol{x}, t_i)$, $i \in \{1, 2\}$, şi a.p.t. pe Γ_3;

(**H7**) $\min\{\mu^*, \beta^*\} > mC^2$,

unde $C > 0$ apare în inegalitatea $\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\|v\|_V$ pentru orice $v \in V$.

Demonstrăm că dacă (**H1**)-(**H7**) sunt adevărate, atunci problema (**P**) are o soluţie unică.

Cele nouă capitole prezentate sunt urmate de lista cu referinţe bibliografice care este bogată, cuprinzând 184 de lucrări.