Rezumatul tezei de doctorat

”Metode topologice în studiul problemelor la limită”,

a doctorandei Maria-Magdalena Boureanu

Teza are ca subiect de studiu ecuaţiile cu derivate parţiale, abordând diverse ecuaţii cu neliniarităţi. Majoritatea rezultatelor obţinute sunt de existenţă a soluţiei, dar avem şi rezultate care atestă lipsa soluţiei. Deasemenea, sunt prezentate şi probleme pentru care stabilim fie unicitatea soluţiei, fie multiplicitatea ei.

În organizarea lucrării se regăseşte o structură simetrică, ea fiind divizată în trei părţi principale, în funcţie de clasa de probleme la limită considerată, după cum urmează:

- Partea I (Capitolele 2-5): probleme eliptice cu soluţii explozive;
- Partea a II-a (Capitolele 6-9): probleme variaţionale cu $p(x)$-Laplacean;
- Partea a III-a (Capitolele 10-12): probleme degenerate şi singulare.

Primul capitol al fiecărei părţi este un capitol preliminar (este vorba despre Capitolele 2, 6 şi 10), fiecare fiind partiţionat în câte trei secţiuni. Prima secţiune este introductivă şi cuprinde note istorice, evidenţiind lucrările pionierat care au pus bazele cercetării în domeniul respectiv. Cea de-a doua secţiune conţine câteva rezultate contemporane semnificative realizând astfel o imagine a cadrului în care se lucrează. În cea de-a treia secţiune este oferită motivaţia fizică a studiului efectuat.

Exceptând Capitolul 1 care a fost rezervat Introducerii, celelalte opt capitole (Capitolele 3-5, 7-9 şi 11-12) se bazează pe lucrări publicate sau acceptate spre publicare (aflate sub tipar).

În Capitolul 3 stabilim câteva rezultate care se regăsesc în articolul ”Entire large solutions for logistic-type equations”, ce va apărea în *Analele Universităţii din Craiova*, momentan fiind sub tipar. Considerăm următoarea clasă de ecuaţii eliptice semilineare:

$$\begin{cases} \Delta u = u + e^{-|x|^a} u^\alpha f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

unde $N \geq 3$, $a \geq 1$, $\alpha > 1$ şi f îndeplineşte condiţiile

$$f \in C^1([0,\ \infty)),\quad f' \geq 0,\quad f \geq 1. \tag{2}$$

Începem prin a demonstra că ecuaţia

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-|x|^a} u^\alpha f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

are soluţii explozive.

Apoi discutăm cazul particular al problemei (1) în care $a = 1$ şi $\alpha > 2$

$$\begin{cases} \Delta u = u + e^{-|x|} u^{\alpha} f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3}$$

În rezultatul principal arătăm că deşi amândouă ecuaţiile

$$\begin{cases} \Delta u = u & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-|x|} u^{\alpha} f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

au soluţii explozive, ecuaţia (3) nu admite astfel de soluţii.

Demonstraţia se bazează pe clasica metodă de reducere la absurd. Deasemenea, folosim principul de maxim şi proprietăţile funcţiilor speciale gamma şi Bessel. Întrebarea dacă problema (1) are sau nu soluţii explozive este lăsată deocamdată fară răspuns. Deşi aducem câteva argumente în sprijinul ideii că pentru a suficient de mare răspunsul este pozitiv, chestiunea este lăsată ca problemă deschisă.

Capitolul 4 se bazează pe lucrarea "On the existence and nonexistence of positive entire large solutions for semilinear elliptic equations" care va apărea în *Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa*. Aici îmbunătăţim rezultatele din Capitolul 3, considerând problema

$$\begin{cases} \Delta u = p_1(x) u^{\alpha} + p_2(x) u^{\beta} f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4}$$

unde $N \geq 3$ şi f este sub aceleaşi ipoteze (2). În cele ce urmează vom da nu numai rezultate de existenţă, ci şi rezultate de ne-existenţă.

Ne situăm sub următoarele condiţii: $\alpha, \beta > 1$ şi $p_1, p_2 \in C^{0,\mu}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ $(N \geq 3,\ 0 < \mu < 1)$ sunt c-pozitive în bilele Ω_n de rază $|x| = n$ (adică pentru fiecare $x_0 \in \Omega$ cu $p_1(x_0) = 0$ (respectiv $p_2(x_0) = 0$) există un domeniu $\Omega_0 \ni x_0$ astfel încât $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_n$ şi $p_1 > 0$, (respectiv $p_2 > 0$) pe $\partial\Omega_0$).

În ipotezele de mai sus, dacă una dintre problemele

$$\begin{cases} \Delta u = p_1(x) u^{\alpha} & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5}$$

sau

$$
\begin{cases}
\Delta u = p_2(x)u^\beta f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\
u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N,
\end{cases} \tag{6}
$$

nu admite soluţii explozive, atunci nici problema (4) nu admite astfel de soluţii.

Ce se întâmplă însă dacă ambele probleme (5) şi (6) au soluţii explozive? În Secţiunea 4.3 dăm câteva exemple în ambele sensuri şi demonstrăm următorul rezultat. Presupunem că $N \geq 3$, $\beta > 2$, f satisface condiţia (2), $p_1 \in C(\mathbb{R}^N)$ satisface condiţia $p_1(x) = p_1(|x|) \geq 1$ şi

$$
\int_0^\infty r p_1(r) dr = \infty,
$$

iar $p_2 \in C^{0,\mu}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ $(0 < \mu < 1)$ satisface condiţia $p_2(x) \geq e^{-|x|}$ şi

$$
\int_0^\infty r M_{p_2}(r) dr < \infty,
$$

unde $M_{p_2}(r) \equiv \max_{|x|=r} p_2(x)$.

Atunci următorul caz particular al problemei (4),

$$
\begin{cases}
\Delta u = p_1(|x|)u + p_2(x)u^\beta f(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\
u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N,
\end{cases}
$$

nu are soluţii explozive, în timp ce ambele probleme (6) şi cazul particular al problemei (5),

$$
\begin{cases}
\Delta u = p_1(|x|)u & \text{în } \mathbb{R}^N, \\
u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{în } \mathbb{R}^N,
\end{cases}
$$

au soluţii explozive.

Capitolul 5 face trecerea la ecuaţiile eliptice quasiliniare cu soluţii explozive. Prezentăm aici mai multe rezultate care sunt în curs de apariţie în *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*, fiind reunite sub titlul "Uniqueness of singular radial solutions for a class of quasilinear problems". Considerm̂ problema:

$$
\begin{cases}
-\Delta_p u = \lambda u^{p-1} - b(x)u^q & \text{în } B_R(x_0), \\
u > 0 & \text{în } B_R(x_0), \\
u = \infty & \text{pe } \partial B_R(x_0),
\end{cases} \tag{7}
$$

unde $B_R(x_0)$ este bila de rază R centrată în $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda > 0$, $b \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$, este o funcţie strict pozitivă cu simetrie radială, iar $q > p - 1 > 1$ şi am notat cu Δ_p operatorul p-Laplacean dat de formula

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\right).$$

Prin condiţia de pe frontieră din (7) înţelegem că $u(x) \to +\infty$ când $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial B_R(x_0)) \to 0^+$. În demonstraţia teoremei principale stabilim existenţa, unicitatea si viteza de explozie a soluţiei. Astfel se obţine că soluţia explozivă $u(x)$ trebuie să verifice relaţia

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{K(b^*(\|x - x_0\|))^{-\beta}} = 1,$$

unde K este o constantă dată de

$$K = \left[(p-1)[(\beta+1)C_0 - 1]\beta^{p-1}(C_0 b_0)^{(p-2)/2}\right]^{\frac{1}{q-p+1}},$$

cu

$$\beta = \frac{p}{2(q-p+1)},\ q > p - 1 > 1,\ b_0 = b(R) > 0,\ C_0 = \lim_{r\to R} \frac{(B(r))^2}{b^*(r)b(r)} \geq 1$$

şi

$$B(r) = \int_r^R b(s)ds,\ b^*(r) = \int_r^R \int_s^R b(t)dtds.$$

De menţionat că rezultatul principal se bazează pe o serie de teoreme auziliare în care generalizăm rezultate deja cunoscute în cazul $p = 2$, trecând la cazul $p > 2$ pe care îl discutăm.

În Capitolele 7-9 sunt căutate soluţii slabe pentru probleme cu $p(x)$ - Laplacean cu ajutorul teoriei de punct critic. Cu alte cuvinte, unei ecuaţii îi asociem o funcţională energetică ale cărei puncte critice sunt soluţii ale ecuaţiei respective.

Interesul pentru studiul problemelor cu $p(x)$ - Laplacean şi considerarea spaţiilor Lebesgue şi Sobolev cu exponent variabil sunt generate de aplicabilitatea în diverse domenii ale fizicii. Deşi cea mai mare parte a materialelor poate fi modelată cu suficientă acurateţe folosind spaţiile Lebesgue şi Sobolev clasice, pentru anumite materiale neomogene, cum sunt fluidele electroreologice, este necesar ca exponentul p să varieze.

Principalul argument utilizat în Capitolele 7-8 este o variantă a teoremei mountain-pass a lui Ambrosetti şi Rabinowitz.

Capitolul 7 se bazează pe lucrarea "Existenţa soluţiilor slabe netriviale pentru o clasă de probleme la limită neomogene", apărută în volumul ataşat *Sesiunii Naţionale de Comunicări Ştiinţifice Studenţeşti – Iaşi, 2007.* Este stabilită existenţa soluţiilor slabe pentru problema:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) + a(x)|u(x)|^{p(x)-2}u = |u(x)|^{q(x)-1}u & \text{în } \Omega, \\ u \not\equiv 0 & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p, q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu $2 \leq \min_{\overline{\Omega}} p(x) < \max_{\overline{\Omega}} p(x) < N$, $\max_{\overline{\Omega}} p(x) < \min_{\overline{\Omega}} q(x) + 1$, $q(x) \leq N$, $q(x) + 1 < Np(x)/(N - p(x))$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisface condiţia: $a \in L^\infty(\overline{\Omega})$ şi există $a_0 > 0$ astfel încât $a(x) \geq a_0$, pentru orice $x \in \Omega$.

Am notat cu $\Delta_{p(x)}$ operatorul $p(x)$-Laplacean, adică

$$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \right).$$

Rezultatele din Capitolul 8 se bazează pe articolele "Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$-Laplace operator" şi "Fraternization in ... Mathematics", publicate în *Electronic Journal of Differential Equations* şi respectiv în *Proceedings of the International Conference of Young Scientists, affiliated to CASC 2006.* Acest capitol tratează existenţa soluţiilor slabe pentru ecuaţia

$$-\Delta_{p(x)} u(x) + b(x)|u(x)|^{p(x)-2} u = f(x, u) \qquad \text{în } \mathbb{R}^N,$$

unde $N \geq 3$, $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ este funcţie Lipschitz cu $2 \leq \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^N} p(x) < \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} p(x) < N$, $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii care satisfac ipotezele:

(b1) $b \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ şi există $b_0 > 0$ astfel încât $b(x) \geq b_0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$;

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, cu $f = f(x, z)$, $f(x, 0) = 0$ şi $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f_z(x,z)}{|z|^{p^+-2}} = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$;

(f2) $p^+ < \frac{Np^-}{N-p^-}$ şi există $s \in (p^+ - 1, Np^-/(N - p^-) - 1)$, $\theta \in (s, Np^-/(N - p^-))$ şi $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\theta/(\theta - p^+ + 1)}(\mathbb{R}^N)$, $g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\theta/(\theta - s)}(\mathbb{R}^N)$, cu $g_1(x), g_2(x) \geq 0$ astfel încât

$$|f_z(x, z)| \leq g_1(x)|z|^{p^+-2} + g_2(x)|z|^{s-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

(f3) există $\mu > p^+$ astfel încât

$$0 < \mu F(x, z) = \mu \int_0^z f(x, t) dt \leq z f(x, z), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \forall\, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Capitolul 9 se bazează pe lucrarea "Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving variable exponent growth conditions" publicată în *Glasgow Mathematical Journal.* În Capitolul 9 este folosită o teoremă a lui Brézis şi Nirenberg obţinându-se astfel existenţa a două soluţii slabe pentru problema de tip Neumann

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(u), & \text{pentru} \quad x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{pentru} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p \in C(\overline{\Omega})$ cu $1 < p(x) < N$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia continuă dată de formula

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{a-1}t, & \text{for} \quad |t| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a-1}} \\ t - |t|^{a-1}t, & \text{for} \quad |t| > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a-1}} \end{cases},$$

unde a este un număr real strict pozitiv, iar $p^+ < a < \frac{Np^-}{N-p^-}$.

Capitolele 11 şi 12 sunt dedicate studiului existenţei şi unicităţii soluţiilor slabe pentru probleme singulare si degenerate în contextul problemelor ce permit modelarea antiplană a unui corp cilindric. Studiul propus se realizează prin introducerea unor spaţii funcţionale cu pondere şi aduce mai multe elemente de noutate. Din punct de vedere matematic, noutatea constă în faptul că în locul problemelor în care $u = 0$ pe întreaga frontieră, considerăm probleme în care u se anulează doar pe o bucată de frontieră de măsură Lebesgue strict pozitivă. Din punct de vedere mecanic, noutatea constă în faptul că ponderea μ se poate anula în anumite puncte, spre deosebire de studiile realizate anterior, în care era impusă condiţia ca ponderea să depăşească un anumit prag strict pozitiv. Rezultatele din ultimele două capitole ale tezei se bazează pe articolul "Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies" care va apărea în *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).*

În Capitolul 11 este considerată următoarea clasă de probleme la limită

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\big(\mu^2(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x})\big) + f_0(\boldsymbol{x}) &= 0 && \text{în } \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) &= 0 && \text{pe } \Gamma_1, \\ \mu^2(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}) &= f_2(\boldsymbol{x}) && \text{pe } \Gamma_2, \end{aligned}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este o submulţime deschisă, mărginită şi conexă, frontiera Γ este Lipschitz şi este partiţionată în două părţi măsurabile Γ_1, Γ_2, astfel încât măsura Lebesgue a lui Γ_1 să fie strict pozitivă. Rezultatul de existenţă şi unicitate este obţinut ĉu ajutorul lemei Lax-Milgram, în ipotezele

$$\mu \in L^2(\Omega), \quad \mu^{-1} \in L^2(\Omega), \quad \mu(\boldsymbol{x}) \neq 0 \text{ a.p.t. în } \Omega, \tag{8}$$

$$\inf_{\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}} \mu^2(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \sup_{\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}} \mu^2(\boldsymbol{x}) = \infty \tag{9}$$

şi

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^\infty(\Gamma_2). \tag{10}$$

Utilizând o inegalitate variaţională de ordinul doi, în Capitolul 12 sunt stabilite existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(\boldsymbol{x}, \nabla u(\boldsymbol{x}))) + f_0(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{în } \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{pe } \Gamma_1, \\ a(\boldsymbol{x}, \nabla u(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) & \text{pe } \Gamma_2, \\ -a(\boldsymbol{x}, \nabla u(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \in \partial\varphi_x(u(\boldsymbol{x})) & \text{pe } \Gamma_3, \end{cases}$$

unde Ω este un domeniu regulat, $a : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = [\mu^2(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v} - 2\beta(\boldsymbol{x}) P_{\widetilde{K}} \frac{1}{2}\boldsymbol{v},$$

$P_{\widetilde{K}}$ este operatorul proiecţie pe $\widetilde{K} = \overline{B_k(O_{\mathbb{R}^2})}$, $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(s) = g(\boldsymbol{x})|s|$ şi $g \in L^\infty(\Gamma_3)$, $g \geq 0$ a.p.t. pe Γ_3, iar ipotezelor (8), (9) şi (10) li se adaugă $\beta \in L^\infty(\Omega)$ şi există $c > 0$ astfel încât $0 < \beta(\boldsymbol{x}) \leq c\, \mu_0(\boldsymbol{x})$ a.p.t. în Ω.

Cele douăsprezece capitole prezentate sunt urmate de lista cu referinţe bibliografice care este bogată, cuprinzând 227 de lucrări.