# CALCULUL UNOR INTEGRALE ŞI SERII CU MARE PRECIZIE

RADU - OCTAVIAN VÎLCEANU

- rezumatul tezei de doctorat -

Conducător ştiinţific: Prof. Univ. Dr. CONSTANTIN P. NICULESCU

- 2009 -

## Cuprins



## 1. Introducere

Lucrarea de faţă, după cum este şi intitulată, se referă la studiul integralelor şi seriilor, aflându-se la frontiera dintre analiza matematică şi informatică. Integralele şi seriile sunt utilizate în diverse domenii ale ştiinţei şi tehnicii, în mecanică, fizică, chimie, inginerie, aeronautică, astronomie, chimie, economie, biologie, etc. De exemplu, integralele eliptice sunt utilizate în dinamica unui punct material supus la legături, în aerodinamica supersonică, în expresia coeficientului de portanţă a unei aripi delta subţiri cu borduri de atac subsonice; integralele logaritmice $\int_0^1 p\left(x\right)\cdot\log\left(\log\left(1/x\right)\right)dx$, cu $p\left(x\right)$ funcţie raţională (vezi [1], [2]), sunt utilizate în fizica statistică şi teoria laticelor; integralele abeliene sunt folosite în geometria diferenţială; integralele de forma $\int_0^1 x^r\left(1\pm x\right)^{-1}\cdot\log^k\left(1\pm x\right)\cdot\log^l xdx$, [3] au valori stabilite în funcţie de valori ale funcţiei zeta, funcţie folosită în fizica cuantică. Seriile de tip *BBP-Ramanujan,* hipergeometrice, euleriene, diverse subserii armonice, sunt utilizate în calculul unor constante cu mare precizie, în diverse baze de numeraţie, de exemplu numărul $\pi$, care a frământat minţile multor matematicieni încă din timpuri străvechi, sau numărul $\exp\left(1\right)$, sau valorile funcţiei zeta, în diversele ei forme, [3], etc. Seriile de puteri (*Taylor*, *Laurent*, sau *Puisieux*) precum şi seriile *Fourier* au, de asemeni, o utilizare mare în toate domeniile unde se utilizează analiza matematică.

## 2. Relaţia întreagă şi algoritmul PSLQ

În acest capitol am definit noţiunea de relaţie întreagă a unui vector dat şi am trecut în revistă evoluţia diverşilor algoritmi (algoritmul lui Euclid, LLL, HJLS, PSLQ, Multi-Pair) cu care poate fi obţinută. Am adaptat algoritmii pentru limbajul *Maple 7* în scopul utilizării lor. Programul sursă al acestora se află în Anexa B, împreună cu unele aplicaţii ale acestora. La sfârşitul capitolului sunt indicate diverse pachete software alternative, în care se găsesc implementări ale acestor algoritmi.

Notăm $\mathbb{K}$ mulţimea numerelor reale, complexe sau de cuaternioni şi cu $\mathbb{O}(\mathbb{K})$ mulţimea întregilor ordinari, întregilor lui Gauss sau întregii lui Hamilton.

**Definiţie 1.** *Un vector* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *din* $\mathbb{K}^n$ *spunem că este în* relaţie întreagă *dacă există un vector* $m = (m_1, m_2, ...m_n) \in \mathbb{O}(\mathbb{K})^n$, $m \neq 0$, *astfel încât*

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n = 0. \tag{1}$$

*Vectorul nenul* $m$ *se numeşte* relaţie întreagă *pentru* $x$.

**Exemple:**
**1)** $x = \left(2/3,\ 1/2,\ 5/6\right),\ m = \left(1,\ 2,\ -2\right)$;
**2)** $x = \left(\alpha,\ \pi,\ e,\ 1\right),\ m = \left(-72,\ 54,\ -63,\ 8\right)$, unde $\alpha = -3\pi/4 - 7e/8 + 1/9$.

## 3. Câteva aplicaţii ale relaţiei întregi

Capitolul începe cu justificarea folosirii diverşilor algoritmi în determinarea relaţiei întregi, precum şi însoţirea acestora cu demonstraţii riguroase. Relaţiile, descoperite cu ajutorul calculatorului, pot fi adevărate până la un număr de zecimale, de aceea se impune demonstrarea riguroasă a lor. Totuşi relaţii aproximative pot să fie folosite în alte domenii ale ştiinţei (în fizică, economie, geografie, în diverse analize statistice de trend), în care un număr suficient de zecimale este suficient. Un exemplu elocvent este folosirea numărului $\pi$, care în antichitate în funcţie de necesităţi, a fost aproximat cu un număr întreg şi apoi pe măsura creşterii nevoilor de precizie, odată cu evoluţia societăţii, a ajuns să fie folosit cu din ce în ce mai multe zecimale exacte. Primul algoritm de calcul al acestui număr este dat de *Arhimede din Siracusa* (287-212 î. Hr.) ce foloseşte *metoda exhaustivă* a lui *Eudoxiu* $(3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7)$.

Sunt analizate câteva aplicaţii ale relaţiei întregi: *recunoaşterea unor constante numerice*, *găsirea polinomului minimal* şi *obţinerea de identităţi*. De recunoaşterea constantelor numerice s-au ocupat diverşi matematicieni şi informaticieni realizând pachete de programe. Un astfel de pachet este Inverse Symbolic Calculator (ISC) ce se găseşte la adresa: *http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html*.

În lucrare am folosit un pachet de programe realizat de Alain Meichsner într-o versiune Maple, pe care am adaptat-o pentru versiunea *Maple 7* şi care oferă o mulţime de facilităţi. Pachetul conţine trei liste de constante $B_1$, $B_2$, $B_3$, ce sunt modificate în funcţie de necesităţile problemelor pe care le rezolvăm. Astfel, am găsit valorile şi apoi am demonstrat pentru câteva integrale logaritmice, o integrală exponenţială, o clasă de integrale şi una de serii trigonometrice ce conţin funcţia $\operatorname{sinc}(x) = x^{-1}\sin(x)$.

Sunt analizate două integrale duble, propuse în revista *American Mathematical Montly*, problemele 11275 şi 11277 din 2007, în demonstraţia cărora se află cazuri particulare ale unor integrale generalizate în capitolul IV. Tot la "Recunoaşterea constantelor numerice" sunt studiate serii binomiale ale lui Lehmer şi cele de tip Apéry. Roger Apéry, în 1979, a folosit o astfel de serie pentru demonstrarea iraţionalităţii constantei $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, fapt pentru care a fost numită *constanta lui Apéry*. Găsirea polinomului minimal este o aplicaţie imediată a algoritmului LLL fiind utilă în algebră. Am ales două exemple semnificative pe care le-am însoţit cu demonstraţii.

Subcapitolul "Obţinerea de identităţi" are ca exemplificare două tipuri: *identităţi de tip Machin* şi *identităţi de tip scară*, utilizate în capitolul 5, în scopul obţinerii de sume de tip BBP-Ramanujan. Identităţile de tip Machin sunt combinaţii liniare întregi de valori ale funcţiei arctangente. Denumirea provine de la cel care a obţinut prima dată o astfel de identitate, în 1706, în scopul calculării rapide şi cu cât mai multe zecimale a numărului $\pi$. Am realizat câteva programe în Maple 7 de depistare a lor, cu care am obţinut liste de astfel de identităţi. Demonstrarea acestora este elementară. Identităţile de tip scară sunt combinaţii liniare întregi de valori ale funcţiei polilogaritmice $\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{r=1}^{\infty} z^r/r^n$, cu $|z| \leq 1$, şi produse de valori ale funcţiei zeta şi puteri ale funcţiei logaritmice naturale. Identităţi de acest tip au fost descoperite pentru prima dată de L. Euler în 1768, şi de J. Landen în 1780, , iar apoi studiul teoretic a fost făcut de L. Lewin în 1991, . Cu ajutorul algoritmului PSLQ am găsit o mulţime de astfel de expresii, acestea găsindu-se în anexa D.

În continuare sunt exemplificate două identităţi cu serii: *seria BBP* şi *formula lui Bill Gosper*. Prima a fost găsită prin metode experimentale, cu ajutorul algoritmului PSLQ, de către David Bailey, Peter Borwein şi Simion Plouffe în 1995 . Valoarea acestei serii este dată de faptul că ajută la calcularea numărului $\pi$, în bază hexagesimală, începând de la o hexagesimală dată, nefiind nevoie de cunoaşterea celor precedente. În Maple, am realizat un program de calcul a unui număr mare de hexagesimale pentru numărul $\pi$, bazat pe această serie. Ea se găseşte în anexa C. După descoperirea seriei BBP, au apărut şi altele de acest tip în scopul găsirii unor metode de calcul pentru alte constante, cu cât mai multe zecimale exacte (vezi capitolul 5). Formula lui Bill Gosper este o serie binomială care poate fi folosită pentru calculul lui $\pi$. O demonstraţie a acestei formule foloseşte funcţia Beta $\beta(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx$ şi valori ale seriei polilogaritmice transformând seria într-o integrală raţională.

## 4. Calculul câtorva integrale

Capitolele 4 şi 5 formează nucleul acestei lucrări, primul se referă la studiul integralelor iar cel de al doilea este rezervat seriilor. În aceste capitole se regăsesc rezultate publicate în reviste de specialitate. Capitolul 4 cuprinde trei subcapitole importante: *integrarea funcţiilor elementare*, *o aplicaţie a seriilor L ale lui Dirichlet* şi *folosirea funcţiei multiple zeta*.

### 4.1. Integrarea funcţiilor elementare

Acest subcapitol este o introducere referitoare la calculul integralelor în care sunt menţionate rezultate ale lui Niels H. Abel, Joseph Liouville, D. Mordukhai-Boltovskoi şi ale lui Joseph-Fels Ritt, precum cazuri în care anumite integrale sunt elementare (de exemplu, integralele Cebâşev), sau nu sunt elementare (de exemplu, integralele eliptice, sau unele integrale exponenţiale sau logaritmice). În următoarele două subcapitole am studiat tipuri de integrale logaritmice ale căror valori depind de valorile unor funcţii hipertrascedentale: funcţia gamma (hipertranscedentalitate demonstrată de O. Hölder, în 1887) şi funcţia zeta (D. Hilbert, în 1900, a arătat hipertranscedentalitatea funcţiei zeta a lui Riemann).

### 4.2. O aplicaţie a seriilor L ale lui Dirichlet

Pentru integralele de tipul

$$I_{-q} = \int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{q-1} \chi_{-q}(n)\, x^{n-1}}{1-x^q} \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx, \tag{2}$$

unde $\chi_{-q}$ este caracter Dirichlet (mod $q$), pe care le-am prezentat la al 6-lea Congres al Matematicienilor Români, de la Bucureşti, din 28 iunie - 4 iulie, 2007 [1], precum şi în [2], pot să fie găsite cu ajutorul calculatorului diverse expresii în valorile funcţiei gamma. De exemplu,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\pi} I_{-15;-3} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}\sum_{n=1}^{14} \chi_{-15;-3}(n)\, x^{n-1}}{\pi\left(1-x^{15}\right)} \ln\ln\frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}\left(x^8-x^7+x^3-x+1\right)}{\pi\left(x^2+x+1\right)\left(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\right)} \ln\ln\frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{3^3\Gamma^{12}(2/3)}{2^4\pi^4\sqrt[3]{5}}\right).\end{aligned}$$

Pentru aceste tipuri de integrale am demonstrat două teoreme ce justifică aceste formule:

**Teorema 2.** *Dacă $\chi_{-\Delta}$ este caracter primitiv impar $(mod\,\Delta)$ atunci :*

$$I_{-\Delta} = \int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\Delta-1} \chi_{-\Delta}(n)\, x^{n-1}}{1-x^\Delta} \ln\ln\frac{1}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\Gamma^2(2/3)}{(2\pi)^{2/3}}\right) & \text{dacă } \Delta=3 \\ \pi\ln\left(\frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt[4]{\pi}}\right) & \text{dacă } \Delta=4 \\ \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\left\{\ln 2\pi - \sum\limits_{r=1}^{\Delta-1}\chi_{-\Delta}(r)\ln\Gamma\left(\frac{r}{\Delta}\right)\right\} & \text{dacă } \Delta>4 \end{cases}. \tag{3}$$

**Teorema 3.** *Dacă* $\chi_{-q;-\Delta}$ *este* caracter impar *(mod q) indus de* caracterul primitiv impar $\chi_{-\Delta}\,(mod\,\Delta)$ *atunci :*

$$(4)\quad I_{-q;-\Delta}=\int_0^1\frac{\sum\limits_{n=1}^{q-1}\chi_{-q;-\Delta}(n)\,x^{n-1}}{1-x^q}\ln\ln\frac{1}{x}dx$$
$$=\left(I_{-\Delta}+L\left(1,\chi_{-\Delta}\right)\sum_{\substack{p/q\\ p\ prim}}^{q-1}\frac{\chi_{-\Delta}(p)\ln p}{p-\chi_{-\Delta}(p)}\right)\prod_{\substack{p/q\\ p\ prim}}\left(1-\frac{\chi_{-\Delta}(p)}{p}\right),$$

*unde*

$$(5)\qquad L\left(1,\chi_{-\Delta}\right)=\begin{cases}\pi/\left(3\sqrt{3}\right) & \text{dacă}\quad \Delta=3\\ \pi/4 & \text{dacă}\quad \Delta=4\\ \frac{\pi}{-\Delta\sqrt{\Delta}}\sum\limits_{n=1}^{\Delta-1}n\cdot\chi_{-\Delta}(n) & \text{dacă}\quad \Delta>4\end{cases}.$$

După cum se vede în expresia funcţiei din care se calculează integrala se găsesc valorile caracterului $\chi$ a lui Dirichlet. De aceea se impune cunoaşterea valorilor acestei funcţii. Am construit un program cu numele *Lag*, în Maple 7, cu ajutorul căruia am găsit aceste valori, pe care le-am grupat în mai multe tabele în anexa A, a acestei lucrări. Tabele conţin valorile caracterelor primitive modulo $|\Delta|\le 40$ şi cele ale caracterelor impare induse modulo $|q|\le 40$, de caracterele primitive modulo $|\Delta|\le 40$. Metoda folosită pentru găsirea formulelor, cu ajutorul calculatorului, se bazează pe pachetul prezentat în subcapitolul "Recunoaşterea constantelor numerice" din capitolului 3. Am obţinut astfel, o listă de integrale, ce poate să fie extinsă oricând. De integrale asemănătoare s-a ocupat V. Adamchik, cu aplicaţii în *probleme de fizică statistică* şi *teoria laticelor*, precum şi Baxter, Temperley şi Ashley, în *probleme de colorare a grafurilor*. Adamchik a găsit formule ce conţin valorile funcţiei digamma $\psi(s)=\Gamma'(s)/\Gamma(s)$ şi ale derivatei parţiale a funcţiei zeta a lui Hurwitz $\zeta^{(1,0)}(s,z)=\partial\zeta(s,z)/\partial s$, unde $\zeta(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+z)^{-s}$, cu $\mathrm{Re}\,s>1$, $0<z\le 1$. Medina şi Moll, au găsit alte formule, pe care le-am aranjat mai structurat. Acestea sunt expresii ce conţin funcţia polilogaritmică $\mathrm{Li}(s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n n^{-s}$, $|x|<1$ şi de derivata parţială a acesteia $\mathrm{Li}^{(1,0)}(s,x)=\partial\,\mathrm{Li}(s,x)/\partial s$.

### 4.3. Folosirea funcţiei multiple zeta în calculul unor integrale

În acest ultim subcapitol am studiat integrale de tipul

$$(6)\qquad I^{\pm}_{k,l,r,m}=\int_0^1\frac{\left(-\log\left(1\pm x\right)\right)^k}{\left(1\pm x\right)^m}\cdot x^r\left(-\log x\right)^l dx,$$

$$(7)\qquad J^{\pm}_{l,r,m,k}=\int_0^1\frac{x^{kr+k-1}}{\left(1\pm x^k\right)^m}\cdot\left(-\log x\right)^l dx,$$

unde $k$, $l$, $r$, $m$ sunt numere întregi, obţinând expresii ce conţin valori ale funcţiei multiple zeta a lui Euler-Zagier şi ale funcţiei multiple extinse zeta (vezi [3], [5]):

**Definiţie 4.** *Numim* funcţie multiplă $\zeta$ a lui Euler-Zagier *funcţia complexă :*

$$\zeta_l\left(s_1, s_2, ..., s_l\right) = \sum_{n_1>n_2>n_3>...>n_l\geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdot n_2^{s_2} ...\cdot n_l^{s_l}}; \tag{8}$$

*unde însumarea se face după toate valorile întregi* $n_1 > n_2 > n_3 > ... > n_l$, *cu* $l \in \mathbb{N}^*$.

**Definiţie 5.** *Numim* funcţie multiplă extinsă $\tilde{\zeta}$ *funcţia complexă*:

$$\tilde{\zeta}_l\left(s_1, s_2, ..., s_l; \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l\right) = \sum_{n_1>n_2>n_3>...>n_l\geq 1} \frac{\sigma_1^{n_1}\cdot \sigma_2^{n_2}\cdot ...\cdot \sigma_l^{n_l}}{n_1^{s_1}\cdot n_2^{s_2}\cdot ...\cdot n_l^{s_l}}, \ \textit{unde } \sigma_i = \pm 1. \tag{9}$$

*În particular*:

$$\tilde{\zeta}_l\left(s_1, s_2, ..., s_l\right) = \sum_{n_1>n_2>n_3>...>n_l\geq 1} \frac{\sigma_1^{n_1}\cdot \sigma_2^{n_2}\cdot ...\cdot \sigma_l^{n_l}}{n_1^{|s_1|}\cdot n_2^{|s_2|}\cdot ...\cdot n_l^{|s_l|}}, \tag{10}$$

*unde* $l \in \mathbb{N}^*, s_1, s_2, ..., s_l \in \mathbb{Z}^*, \sigma_j = signum\left(s_j\right)$.

Cazuri particulare ale acestor expresii au fost cunoscute de L. Euler, ele conţinând numai valori ale funcţiei zeta într-o singură variabilă. Ele se găsesc în cartea lui I. S. Gradzhteyn şi I. M. Ryzhyk , de exemplu

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot \log x dx = \tilde{\zeta}_1\left(-2\right) = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \text{(formula 4.231.1)} \tag{11}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\cdot \log x dx = -\zeta_1\left(2\right) = -\frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{(formula 4.231.2)} \tag{12}$$

Sumele lui Euler-Zagier, ce apar în definiţiile funcţiilor zeta, ocupă un rol important în teoria nodurilor şi teoria câmpurilor cuantice. Formulele legate de aceste integrale pot să fie găsite cu ajutorul algoritmului PSLQ, sau cu pachetul de identificare a constantelor, realizat in Maple. Demonstraţiile sunt date sub forma unor teoreme sau corolare:

**Teorema 6.** *Fie* $k, r$ *şi* $l$ *numere întregi,* $k, l, r \geq 0$, $l \geq 1$. *Atunci:*

$$I^{\pm}_{k,l,r,1} = \int_0^1 \frac{\left(-\log\left(1\pm x\right)\right)^k}{1\pm x}\cdot x^r\left(-\log x\right)^l dx$$
$$= \mp k!l! \sum_{n_1>n_2>n_3>...>n_{k+1}\geq 1} \frac{\left(\mp 1\right)^{n_1}}{\left(n_1+r\right)^{l+1}\cdot n_2\cdot n_3\cdot ...\cdot n_{k+1}}.$$

**Corolar 7.** *Fie* $k$ *şi* $l$ *numere întregi,* $k \geq 0$, $l \geq 1$. *Atunci :*

$$I^{\pm}_{k,l,0,1} = \int_0^1 \frac{\left(-\log\left(1\pm x\right)\right)^k}{1\pm x}\cdot\left(-\log x\right)^l dx = \mp k!l!\tilde{\zeta}_{k+1}\left(\mp\left(l+1\right), \{1\}_k\right);$$

*şi*

$$I^{+}_{k,0,0,1} = \int_0^1 \frac{\left(-\log\left(1+x\right)\right)^k}{1+x} dx = -k!\tilde{\zeta}_{k+1}\left(-1, \{1\}_k\right).$$

**Corolar 8.** *Fie $k$ şi $l$ numere întregi, $k \geq 0$, $l \geq 1$. Atunci:*

$$I^{\pm}_{k,l,1,1} = \int_0^1 \frac{(-\log(1 \pm x))^k}{1 \pm x} \cdot x(-\log x)^l dx$$
$$= k!l!\left(\tilde{\zeta}_{k+1}(\mp(l+1), \{1\}_k) \pm \sum_{n_1=n_2>n_3>\ldots>n_{k+1}\geq 1} \frac{(\mp 1)^{n_1}}{(n_2+1)^{l+1} \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{k+1}}\right),$$

*iar*

$$I^{+}_{k,0,1,1} = \int_0^1 \frac{(-\log(1 + x))^k}{1 + x} \cdot x dx$$
$$= k!\left(\tilde{\zeta}_{k+1}(-1, \{1\}_k) + \sum_{n_1=n_2>n_3>\ldots>n_{k+1}\geq 1} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_2+1) \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{k+1}}\right).$$

*În particular*

$$I^{\pm}_{0,l,1,1} = \int_0^1 \frac{1}{1 \pm x} \cdot x(-\log x)^l dx = l!\left(\tilde{\zeta}(\mp(l+1)) \pm 1\right), \quad \textit{unde } l \in \mathbb{N}^*$$

$$I^{+}_{0,0,1,1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot x dx = \tilde{\zeta}(-1) + 1 = 1 - \log(2),$$

$$I^{-}_{1,l,1,1} = -\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{1-x} \cdot x(-\log x)^l dx$$
$$= -l!\left(\zeta_2(l+1, 1) - l - 1 + \sum\nolimits_{i=2}^{l+1} \zeta(i)\right), \textit{unde } l \in \mathbb{N}^*$$

$$I^{+}_{1,l,1,1} = -\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x} \cdot x(-\log x)^l dx$$
$$= -l!\left(\tilde{\zeta}_2(-l-1, 1) + l + 1 + 2\tilde{\zeta}(-1) + \sum\nolimits_{i=2}^{l+1} \tilde{\zeta}(-i)\right), \textit{unde } l \in \mathbb{N}$$

**Corolar 9.** *Fie $l$ şi $r$ numere întregi, $l \geq 1$, $r \geq 0$. Atunci:*

$$I^{\pm}_{0,l,r,1} = \int_0^1 \frac{x^r}{1 \pm x} \cdot (-\log x)^l dx = l!(\mp 1)^{r+1}\left(\tilde{\zeta}(\mp(l+1)) - \sum_{n_1=1}^{r} \frac{(\mp 1)^{n_1}}{n_1^{l+1}}\right). \tag{13}$$

*iar*

$$I^{+}_{0,0,r,1} = \int_0^1 \frac{x^r}{1+x} dx = (-1)^{r+1}\left(\tilde{\zeta}(-1) - \sum_{n_1=1}^{r} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1}\right).$$

**Teorema 10.** *Fie $k$ $r$,şi $l$ numere întregi, $k, r \geq 0$, $l \geq 1$. Atunci:*

$$I^{\pm}_{k,l,r,0} = \int_0^1 (-\log(1 \pm x))^k \cdot x^r (-\log x)^l dx$$
$$= k!l! \sum_{n_1>n_2>n_3>\ldots>n_k\geq 1} \frac{(\mp 1)^{n_1}}{(n_1+r+1)^{l+1} \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k},$$

*iar*

$$\begin{aligned} I^{+}_{k,0,r,0} &= \int_0^1 \left(-\log\left(1+x\right)\right)^k \cdot x^r dx \\ &= k! \sum_{n_1>n_2>n_3>\ldots>n_k\geq 1} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1+r+1)\cdot n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ldots\cdot n_k}. \end{aligned}$$

*În particular*

$$\begin{aligned} I^{+}_{1,0,r,0} = -\int_0^1 \log\left(1+x\right)\cdot x^r dx = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1+r+1)\cdot n_1} \\ = \begin{cases} \frac{2}{r+1}\log(2)+S_r & \text{dacă} \quad r=2p \\ -S_r & \text{dacă} \quad r=2p+1 \end{cases}, \end{aligned}$$

*unde* $S_r = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r+1}\frac{(-1)^i}{i}$ *şi* $p\in\mathbb{Z}$.

**Teorema 11.** *Fie* $k,r,l$ *şi* $m$ *numere întregi,* $k,l,r\geq 0$; $m,\ l\geq 1$. *Atunci:*

$$I^{-}_{k,l,r,m} = \int_0^1 \frac{\left(-\log\left(1-x\right)\right)^k}{\left(1-x\right)^m}\cdot x^r\left(-\log x\right)^l dx = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}I^{-}_{l,k,i-m,0.}$$

**Corolar 12.** *Fie* $l$ *număr întreg. Pentru* $l\geq 1$ :

$$\begin{aligned} I^{-}_{1,l,0,0} = -\int_0^1 \log\left(1-x\right)\cdot\left(-\log x\right)^l dx = l!\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{(n_1+1)^{l+1}\cdot n_1} \\ = l!\left(l+1-\sum_{i=2}^{l+1}\zeta(i)\right), \end{aligned}$$

*iar pentru* $l\geq 0$ :

$$\begin{aligned} I^{+}_{1,l,0,0} = -\int_0^1 \log\left(1+x\right)\cdot\left(-\log x\right)^l dx = -l!\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n_1}}{(n_1+1)^{l+1}\cdot n_1} \\ = l!\left(l+1+\tilde{\zeta}(-1)+\sum_{i=1}^{l+1}\tilde{\zeta}(-i)\right). \end{aligned}$$

**Teorema 13.** *Fie* $l,m,r,k$ *număr întreg,* $l,m,r\geq 1, k\geq 2$. *Atunci:*

$$J^{\pm}_{l,r,m,k} = \int_0^1 \frac{x^{kr+k-1}}{\left(1\pm x^k\right)^m}\cdot\left(-\log x\right)^l dx = \frac{1}{k^{l+1}}I^{\pm}_{0,l,r,m.}$$

**Corolar 14.** *Fie* $l$ *număr întreg,* $l\geq 1$. *Atunci:*

$$J^{\pm}_{l,0,1,2} = \int_0^1 \frac{x}{1\pm x^2}\cdot\left(-\log x\right)^l dx = \frac{1}{2^{l+1}}I^{\pm}_{0,l,0,1} = \mp\frac{1}{2^{l+1}}l!\tilde{\zeta}\left(\mp(l+1)\right).$$

**Teorema 15.** *Fie $r$ ,$l$, $m_1$ şi $m_2$ numere întregi, $l, m_1, m_2 \geq 0$. Atunci:*

$$I_{l,r,m_1,m_2} = \int_0^1 \frac{x^r \left(-\log x\right)^l}{\left(1-x\right)^{m_1}\left(1+x\right)^{m_2}} dx = \sum_{i=1}^{m_1} A_i I^-_{0,l,r,i} + \sum_{j=1}^{m_2} B_j I^+_{0,l,r,j} \ ,$$

*unde $A_i, B_j \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, ..., m_1\}$, $j \in \{1, 2, ..., m_2\}$.*

**Corolar 16.** *Fie $l$ număr întreg, $l \geq 1$. Atunci:*

$$\begin{aligned} I_{l,0,1,1} = \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \cdot \left(-\log x\right)^l dx &= \frac{1}{2}\left(I^-_{0,l,0,1} + I^+_{0,l,0,1}\right) \\ &= \frac{1}{2} l! \left(\zeta\left(l+1\right) - \tilde{\zeta}\left(-l-1\right)\right) \\ &= l! \left(1 - \frac{1}{2^{l+1}}\right) \zeta\left(l+1\right). \end{aligned}$$

**Corolar 17.** *Fie $l$ număr întreg, $l \geq 1$. Atunci:*

$$\begin{aligned} I_{l,1,1,1} = \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} \cdot \left(-\log x\right)^l dx &= \frac{1}{2}\left(I^-_{0,l,1,1} + I^+_{0,l,1,1}\right) \\ &= \frac{1}{2} l! \left(\zeta\left(l+1\right) + \tilde{\zeta}\left(-l-1\right)\right) = \frac{1}{2^{l+1}} l! \zeta\left(l+1\right). \end{aligned}$$

Cu ajutorul integralelor de acest tip pot să fie calculate, folosind Maple, rapid şi cu mare precizie, valorile $\widetilde{\zeta}_{k+1}\left(\pm\left(l+1\right), \{1\}_k\right)$, $k$, $l \in \mathbb{Z}$, $k > 0, l > 1$. De exemplu,

$$(14) \quad \zeta_4\left(6,1,1,1\right) = \frac{\left(-1\right)^{3+5}}{\Gamma\left(4\right)\Gamma(6)} \int_0^1 \frac{\log^3\left(1-x\right)}{1-x} \cdot \log^5 x dx$$
$$\approx .0001060902289102175205140559549145517589881...$$

şi

$$(15) \quad \tilde{\zeta}_4\left(-6,1,1,1\right) = \frac{\left(-1\right)^{3+5+1}}{\Gamma\left(4\right)\Gamma(6)} \int_0^1 \frac{\log^3\left(1+x\right)}{1+x} \cdot \log^5 x dx$$
$$\approx .0000237218053494050919268700955137632799973 83...$$

O aplicaţie interesantă a integralelor din acest subcapitol este cel studiat de Sondow şi Sergey Zlobin , cu care au găsit formule de calcul ale unor integrale pe politopuri.

## 5. Calculul câtorva sume

În acest ultim capitol am analizat câteva tipuri de serii: *sumele de tip BBP-Ramanujan* în conexiune cu *seriile hipergeometrice*, *sumele de tip Euler* şi *subseriile armonice de tip Kempner-Irwin.*

### 5.1. Sume de tip BBP-Ramanujan

Am reunit cele două tipuri de serii, de *tip BBP* şi *Ramanujan*, pentru care am grupat mai multe metode de demonstrare a lor: cu ajutorul identităţilor Machin, serii BBP ale căror sume sunt logaritmi, sau cu ajutorul identităţilor scară, ce conţin valori ale funcţiei polilogaritmice.

**Definiţie 18.** *Numim* serie de tip BBP-Ramanujan , *seria hipergeometrică de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n x^n \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \cdot \frac{P(n)}{Q(n)}, \tag{16}$$

*unde* $u = 1$ *sau* $u = -1$; $x, a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $j \in \{1, 2, ..., q\}$; $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q$ *nu are rădăcini întregi pozitive şi cu* simbolurile lui L. A. Pochhammer*:*

$$(a)_n = a(a+1) \cdot ... (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \tag{17}$$

*Numărul* $x$ *îl numim* bază.

Aceste serii pot fi descoperite cu ajutorul algoritmului PSLQ. Pentru extinderile binomiale ale seriilor BBP există integrale cu aceeaşi sumă, ce pot să fie găsite cu ajutorul calculatorului tot cu algoritmul PSLQ. Am prezentat algoritmul ce foloseşte la obţinerea unor constante într-o baza dată, pornind de la o poziţie dată a cifrelor după virgulă.

### 5.2. Serii hipergeometrice

Seriile hipergeometrice au fost studiate de mulţi matematicieni (Mary Celine Fasenmyler, R. W. Jr. Gosper, Doron Zeilbenger, etc.) construindu-se diverşi algoritmi de calcul ce pot fi găsiţi implementaţi în pachetul EKHAD, realizat în Maple . Ele sunt cazuri particulare ale seriilor BBP-Ramanujan.

Cu ajutorul seriilor hipergeometrice se pot obţine expresii ale sumelor de tip BBP-Ramanujan. Astfel, aplicând în Maple pentru suma BBP sau pentru seria binomială a lui Apéry

```
>sum((4/(8*n+1)-2/(8*n+4)-1/(8*n+5)-1/(8*n+6))/(16^n), n=0..infinity);
>(5/2)*sum(((-1)^(n-1))/(binomial(2*n,n)*n^3), n=1..infinity);
```

obţinem

$$\begin{aligned} \pi = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \\ = \frac{47}{15}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8} \\ \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{2}, \frac{9}{8} \end{matrix}; \frac{1}{16}\right] + \frac{271}{39312}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix} 2, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{2}, \frac{9}{8} \\ \frac{17}{8}, \frac{11}{4}, \frac{21}{8}, \frac{5}{2} \end{matrix}; \frac{1}{16}\right] \\ + \frac{1}{20944}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix} 3, \frac{17}{8}, \frac{11}{4}, \frac{21}{8}, \frac{5}{2} \\ \frac{15}{4}, \frac{29}{8}, \frac{7}{2}, \frac{25}{8} \end{matrix}; \frac{1}{16}\right]; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^3} = \frac{5}{4}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1, 1, 1, 1 \\ 2, 2, 3/2 \end{matrix}; -\frac{1}{4}\right]. \tag{19}$$

### 5.3. Sume de tip Euler

Ultimile două subcapitole se referă la două tipuri de serii cu convergenţă lentă. Primul tip, *sume de tip Euler*, este format din serii duble ce conţin numerele armonice. Datorită convergenţei lente pentru calculul cât mai precis este nevoie de un timp îndelungat şi de computere cu putere mare de calcul. Astfel, *Jonathan M. Borwein*, *David H. Bailey*, *Roland Girgensohn*, au reuşit să găsească diverse expresii pentru aceste formule , folosind algoritmul PSLQ. În lucrarea de faţă este dată o metodă de demonstraţie bazată pe o funcţie numită *nucleu* şi pe *teorema reziduurilor* a lui Cauchy.

### 5.4. Seriile de tip Kempner-Irwin

Seriile pe care le-am intitulat de *tip Kempner-Irwin*, sunt subserii ale celei armonice. Termenii acestor subserii sunt inversele unor numere ce respectă o condiţie asupra cifrelor din care sunt formate într-o bază dată. O parte din rezultatele din acest capitol se găsesc în [4].

**Definiţie 19.** *Fie $X_m$ un şir de $m \geq 0$ cifre. Fie $S^-$ mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive care* nu conţin *pe $X_m$, în scrierea în baza* 10. *Analog, notăm $S^+$ mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive* care conţin *pe $X_m$, iar $S^{(p)}$ mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive care* conţin *pe $X_m$* exact *de $p$ ori. Mai notăm $S^{(\leq p)}$, mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive care* conţin *pe $X_m$* cel mult *de $p$ ori şi $S^{(\geq p)}$, mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive care* conţin *pe $X_m$* cel puţin *de $p$ ori. Seriile*

$$\Psi^-_{k;X_m} = \sum_{s\in S^-} \frac{1}{s^k}, \quad \Psi^+_{k;X_m} = \sum_{s\in S^+} \frac{1}{s^k}, \tag{20}$$

$$\Psi^{(p)}_{k;X_m} = \sum_{s\in S^{(p)}} \frac{1}{s^k}, \quad \Psi^{(\leq p)}_{k;X_m} = \sum_{s\in S^{(\leq p)}} \frac{1}{s^k}, \tag{21}$$

$$\Psi^{(\geq p)}_{k;X_m} = \sum_{s\in S^{(\geq p)}} \frac{1}{s^k}, \qquad \text{unde } k \in \mathbb{N}^*, \tag{22}$$

*le numim* de tip Kempner.

*Dacă considerăm o mulţime $X$, de şiruri de cifre, iar $S$, mulţimea numerelor care respectă diverse condiţii, exprimate în cele cinci forme de mai sus. Seria*

$$\Psi_{k;X} = \sum_{s\in S} \frac{1}{s^k}, \qquad \text{unde } k \in \mathbb{N}^*, \tag{23}$$

*o numim* de tip Irwin .

Este cunoscut că seria armonică este divergentă. Cu toate acestea unele serii de tip Kempner-Irwin sunt convergente (de exemplu $\Psi^-_{1;"9"} = \sum_{s\in S^-} 1/s$, $\Psi^{(p)}_{1;"9"} = \sum_{s\in S^{(p)}} 1/s$, $\Psi^{(\leq p)}_{1;"9"} = \sum_{s\in S^{(\leq p)}} 1/s$). Pentru calculul acestor serii Robert Baillie , a construit un algoritm implementat în *Mathematica*. De remarcat este faptul că în baza doi seriile de acest tip au o convergenţă rapidă şi pot să fie calculate uşor şi cu mare precizie în

*Maple*. Am extins seriile Kempner-Irwin la serii Kempner-Irwin în forma logaritmică, ele fiind tot convergente, de exemplu

$$\Omega^{-}_{1;"9"} = \sum_{s\in S^{-}} \frac{1}{s\ln s} \simeq 3.41067..., \tag{24}$$

unde $S^{-}$ este mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive care nu conţin cifra 9.

Spre finalul capitolul este studiată convergenţei unor şiruri de sume de tip Kempner-Irwin:

**Teorema 20.** a) *Fie $X_m$ un şir cu $m$ cifre ce are perioada $p$.*

$$X_m = "\underbrace{d_1d_2...d_pd_1d_2...d_p...d_1d_2...d_p}_{m=kp\ cifre}". \tag{25}$$

*Fie $\Psi^{-}_{X_m}$ suma de $1/s$ unde $s$ nu conţine şirul $X_m$. Atunci*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Psi^{-}_{1;X_m}}{10^m} = \frac{10^p}{10^p-1}\log 10. \tag{26}$$

b) *Fie $X_m = "d_1d_2...d_m"$ un şir cu $m$ cifre neperiodic. Fie $\Psi^{-}_{X_m}$ suma de $1/s$ unde $s$ nu conţine şirul $X_m$. Atunci*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Psi^{-}_{1;X_m}}{10^m} = \log 10. \tag{27}$$

**Teorema 21.** a) *Fie $X_m$ un şir cu $m$ cifre ce are perioada $p$.*

$$X_m = "\underbrace{d_1d_2...d_pd_1d_2...d_p...d_1d_2...d_p}_{m=kp\ cifre}". \tag{28}$$

*Fie $\Omega^{-}_{X_m}$ suma de $1/(s\ln s)$ ude $s$ nu conţine şirul $X_m$. Atunci*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Omega^{-}_{1;X_m}}{10^m \ln\frac{m}{m-1}} = \frac{10^p}{10^p-1}. \tag{29}$$

b) *Fie $X_m = "d_1d_2...d_m"$ un şir cu $m$ cifre neperiodic. Fie $\Omega^{-}_{X_m}$ suma de $1/(s\ln s)$ unde $s$ nu conţine şirul $X_m$. Atunci*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Omega^{-}_{1;X_m}}{10^m \ln\frac{m}{m-1}} = \frac{10^p}{10^p-1} = 1. \tag{30}$$

Următoarea teoremă este demonstrată în [4]:

**Teorema 22.** *Şirul $\left(\Psi^{(r)}_{1;"89"}\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ descreşte şi*

$$\lim_{r\to\infty} \Psi^{(r)}_{1;"89"} \simeq 22.2176459..., \tag{31}$$

*unde*

$$\Psi^{(r)}_{1;"89"} = \sum_{s\in S^{(r)}} \frac{1}{s} \tag{32}$$

*şi $S^{(r)}$ este mulţimea numerelor întregi pozitive ce se termină în 8 şi conţin pe "89" exact de $r$ ori.*

## Bibliografie

[1] R. O. Vîlceanu, *Application of Dirichlet L-series in the calculus of integrals,* The 6th Congress of Romanian Mathematicians, Bucharest, June 28-July 4, 2007.

[2] R. O. Vîlceanu, *An application of Dirichlet L-series to the computation of certain integrals,* Bull. Math. Sci. Math. Roumanie Tome **51**(99) No.2, 2008, Pp. 159-173.

[3] R. O. Vîlceanu, *The Multiple Zeta Function and the Computation of Some Integrals in Compact Form*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., Volume **35**, 2008, Pages 182-198, ISSN: 1223-6934.

[4] R. O. Vîlceanu, *On the series of Kempner-Irwin type,* Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., Vol. **36**(1), Pp 112-121, 2009, ISSN: 1223-6934.

[5] R. O. Vîlceanu, *The computation of some integrals in compact form,* Creative Mathematics and Informatics, Universitatea de Nord din Baia Mare, Vol. **18**, 2009.