UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

JEFLEA MARIA ANTONETA

LOCALIZĂRI ÎN CATEGORIA MTL - ALGEBRELOR

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

CONDUCĂTOR ŞTIINȚIFIC:

PROF.DR. DUMITRU BUŞNEAG

2009

Introducere

În ultimii ani, structurile reziduate au devenit populare în computer science deoarece s-a înţeles că ele joacă un rol fundamental în logica fuzzy. Originea laticilor reziduate se găseşte în Logica Matematică fără contracţii. Ele au fost investigate de Krull ([**69**]), Dilworth ([**38**]), Ward şi Dilworth ([**96**]), Ward ([**95**]), Balbes şi Dwinger ([**2**]) şi Pavelka ([**79**]).

În afară de interesul lor pentru logică, laticile reziduate sunt interesante prin proprietăţile lor algebrice (vezi [**7**], [**21**], [**38**], [**46**], [**68**], [**78**], [**95**], [**96**]). Idziak probează în [**57**], că clasa laticilor reziduate este ecuaţională. În literatura de specialitate, aceste latici poartă mai multe nume: *BCK- latici* în [**51**], *BCK- algebre pline* în [**69**], FL_{ew}*- algebre* în [**77**], şi *integral, reziduated, comutativi l-monoizi* în [**8**].

Logica BL (Basic Logic) este o logică reziduată cu mai multe valori introdusă de Hájek în [**51**]. Logica Monoidă (ML), introdusă de Höhle ([**55**]), este o logică care algebrizează clasa laticilor reziduate; MTL algebrele (vezi [**41**]) sunt structuri algebrice pentru logica MTL a lui Esteva-Godo un calcul propoziţional cu mai multe valori care formalizează structura intervalului real unitate $[0,1]$, indusă de o t-normă continuă. MTL algebrele au fost independent introduse în [**43**] sub numele de *BL-algebre slabe (weak-BL algebre).*

Reamintim ([**43**]) că laticile reziduate necomutative (numite şi *latici pseudo-reziduate, latici bireziduate sau latici reziduate generalizate*) sunt algebre

$(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ de tipul $(2,2,2,2,2,0,0)$ satisfăcînd următoarele condiţii: $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ este latice mărginită; $(A, \odot, 1)$ este monoid şi $x \odot y \leq z$ dacă şi numai dacă $x \leq y \rightarrow z$ dacă şi numai dacă $y \leq x \rightsquigarrow z$ pentru orice $x, y, z \in A$.

Pseudo $BL-$ *algebrele* au fost introduse în [**39**] ca extensii necomutative pentru $BL-$algebrele lui Hájek. Pseudo $BL-$algebrele sunt latici reziduate mărginite şi necomutative $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ satisfăcînd *condiţia de pseudo-divizibilitate*: $x \wedge y = (x \rightarrow y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y)$ şi de *pseudo-preliniaritate* : $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$.

Pornind de la aceste două condiţii s-au desprins două direcţii de a extinde pseudo $BL-$algebrele. O direcţie investighează laticile reziduate necomutative mărginite satisfăcînd condiţia de pseudo-divizibilitate, studiate sub numele de *latici (mărginite) divizibile pseudo - reziduate* sau *Rl - monoizi mărginiţi.* A doua direcţie se ocupă de studiul laticile reziduate necomutative mărginite satisfăcînd condiţia de pseudo-preliniaritate, altfel zis, *pseudo* $MTL-$ *algebre.*

Principalul scop al tezei este de a caracteriza laticea sistemelor deductive a unei latici reziduate, laticile reziduate arhimedeene şi hiperarhimedeene şi de a dezvolta o teorie a localizării pentru MTL *- algebre precum şi a extinde această teorie la cazul necomutativ al pseudo* MTL *- algebrelor.*

O remarcabilă construcţie din teoria inelelor este *inelul de localizare $A_{\mathcal{F}}$ asociat unei topologii Gabriel $\mathcal{F}$ peste inelul A*; pentru anumite chestiuni legate de înţelesul termenului de *localizare* avem în vedere Capitolul IV : *Localizarea* din cartea lui N. Popescu de *Categorii abeliene*, [**85**].

În cartea lui Lambek [**73**] la pagina 36 se introduce noţiunea de *inel complet de cîturi al unui inel comutativ* ca un caz particular de inel de localizare (relativ la idealele *dense*).

Pornind de la exemplul inelelor, J. Schmid în [**89**], [**90**] intoduce noţiunea de *latice maximală de cîturi pentru o latice distributivă* cu ajutorul multiplicatorilor definiţi de Cornish în [**32**], [**33**].

Tot după modelul inelului de localizare de la inele (vezi [**45**]), în [**47**] este definită pentru o latice distributivă mărginită L *laticea de localizare $L_{\mathcal{F}}$ of L relativă la o topologie $\mathcal{F}$ pe L* şi se arată că laticea maximală de cîturi a unei latice distributive este de fapt o latice de localizare (relativă la topologia *idealelor regulate*).

Aceeaşi teorie este valabilă şi pentru laticea de fracţii a unei latice distributive cu 0 şi 1 relativă la un sistem $\wedge$ - închis (vezi [**10**]).

O teorie a localizării pentru algebre Hilbert şi Hertz a fost realizată în [**12**]; pentru cazul algebrelor Heyting vezi [**34**], pentru cazul MV şi pseudo MV-algebrelor vezi [**14**], [**22**], [**81**], pentru cazul BL şi pseudo BL-algebrelor vezi [**18**], [**20**], [**81**] iar pentru LMn-algebrelor vezi [**25**].

Alte aspecte în legătură cu noţiunea de localizare se găsesc în lucrările [**75**], [**86**], [**87**].

Rezultatele originale cuprinse în teză pot fi găsite în mai multe articole, publicate sau în curs de publicare: [**23**], [**62**], [**63**] şi [**82**]-[**84**].

Capitolul 1 : Latici reziduate

Primul capitol conţine anumite rezultate originale relative la laticile reziduate comutative. Rezultatele originale sunt conţinute în articolele [**23**], [**63**] şi [**84**].

O *latice reziduată* ([**7**], [**92**]) este o algebră $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ de tipul $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ satisfăcînd următoarele axiome:

(LR_1) $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ este latice mărginită;
(LR_2) $(A, \odot, 1)$ este monoid comutativ;
(LR_3) $\odot$ şi $\rightarrow$ formează o *pereche de adjuncţie*, adică $c \leq a \rightarrow b$ dacă şi numai dacă $a \odot c \leq b$ pentru orice $a, b, c \in A$.

În această teză simbolurile $\Rightarrow$ şi $\Leftrightarrow$ sunt utilizate pentru implicaţia logică şi echivalenţa logică.

Exemple clasice de latici reziduate sunt structurile Łukasiewicz, Produs, Gődel şi algebrele Boole. De asemenea prezint în teză şi două exemple de latici reziduate care nu sunt distributive.

Clasa $\mathcal{RL}$ a laticilor reziduate este ecuaţională, în conformitate cu ([**57**]).

O latice reziduată $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ se numeşte *BL-algebră* (vezi ([**92**])) dacă următoarele identităţi au loc în A :

(BL_1) $x \odot (x \rightarrow y) = x \wedge y$ (divizibilitatea);
(BL_2) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ (preliniaritatea).

Structurile Łukasiewicz, Gődel şi Produs sunt $BL-$ algebre dar nu orice latice reziduată este o BL-algebră (vezi [**92**], p.16).

O latice reziduată $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ este o MV-algebră ([**92**]) dacă şi numai dacă satisface condiţia : $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$, pentru orice $x, y \in A$.

Pe orice latice reziduată A ordinea naturală determină o structură de latice cu 0 şi 1 notată cu $L(A)$ iar *centrul* unei latice reziduate, notat $B(A)$ este algebra Boole a elementelor complementate ale laticei $L(A)$.

Reamintim proprietăţi cunoscute ale laticilor reziduate dar demonstrăm şi cîteva rezultate noi, şi stabilim conexiuni între laticile reziduate şi algebrele Hilbert.

Pentru o latice reziduată A vom nota cu $Ds(A)$ laticea sistemelor sale deductive. Laticea $(Ds(A), \subseteq)$ este complet Brouweriană (deci distributivă), elementele compacte fiind chiar sistemele deductive principale ale lui A.

Pentru două sisteme deductive D_1, $D_2 \in Ds(A)$ definim

$$D_1 \rightarrow D_2 = \{a \in A : D_1 \cap [a) \subseteq D_2\},$$

astfel că $(Ds(A), \vee, \wedge, \rightarrow, \{1\}, A)$ devine o algebră Heyting , în care pentru $D \in Ds(A)$,

$$D^* = D \rightarrow \mathbf{0} = D \rightarrow \{1\} = \{x \in A : x \vee y = 1, \text{ pentru orice } y \in D\}.$$

Teorema 1.39 caracterizează laticile reziduate pentru care laticea sistemelor deductive este algebră Boole:

Dacă A este o latice reziduată, atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

(i) $(Ds(A), \vee, \wedge, ^*, \{1\}, A)$ *este algebră Boole,*
(ii) *Orice sistem deductiv al lui A este principal şi pentru orice $a \in A$, există $n \geq 1$ astfel încît $a \vee (a^n)^* = 1$.*

Pentru laticea $Ds(A)$ (care este distributivă) vom nota prin $Spec(A)$ mulţimea tuturor elementelor inf-ireductibile (finite) ($Spec(A)$ se numeşte *spectrul* lui A) şi prin $Irc(A)$ mulţimea tuturor elementelor (complet) inf-ireductibile ale laticei $Ds(A)$.

În teză pun în evidenţă caracterizări pentru elementele inf-ireductibile şi complet inf-ireductibile ale lui $Ds(A)$ în Propoziţia 1.46., Corolarele 1.47., 1.48. şi Teorema 1.49. :

Pentru un sistem deductiv propriu $P \in Ds(A)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $P \in Spec(A)$,
(ii) *Pentru orice $x, y \in A \backslash P$ există $z \in A \backslash P$ astfel încît $x \leq z$ şi $y \leq z$,*
(iii) *Dacă $x, y \in A$ şi $< x > \cap < y > \subseteq P$, atunci $x \in P$ sau $y \in P$ (unde $< x >$ este sistemul deductiv principal al lui A generat de x),*
(iv) *Pentru orice $x, y \in A/P, x \neq 1, y \neq 1$, există $z \in A/P, z \neq 1$ astfel încît $x \leq z$ şi $y \leq z$,*
(v) *Pentru orice $D \in Ds(A), D \to P = P$ sau $D \subseteq P$.*

Relativ la unicitatea scrierii sistemelor deductive ca intersecţie de sisteme deductive prime avem următorul rezultat:

Teorema 1.51. *Dacă orice $D \in Ds(A)$ are o unică reprezentare ca intersecţie de elemente din $Spec(A)$, atunci $(Ds(A), \vee, \wedge, ^*, \{1\}, A)$ este o algebră Boole.*

Un sistem deductiv $D \in Ds(A)$, $D \neq A$ se numeşte *maximal relativ la un element* a dacă $a \notin D$ şi dacă $D' \in Ds(A)$ este propriu astfel încît $a \notin D'$ şi $D \subseteq D'$, atunci $D = D'$.

Despre aceste sisteme deductive avem rezultatele:

Corolar 1.53. *Pentru orice $a \in A, a \neq 1$, există un sistem deductiv D_a maximal relativ la a .*

Teorema 1.54. *Pentru $D \in Ds(A), D \neq A$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $D \in Irc(A)$,
(ii) *Există $a \in A$ astfel încît D este maximal relativ la a.*

Teorema 1.55. *Fie $D \in Ds(A), D \neq A$ şi $a \in A \backslash D$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) *D este maximal relativ la a,*
(ii) *Pentru orice $x \in A \backslash D$ există $n \geq 1$ astfel încît $x^n \to a \in D$.*

şi

Corolar 1.56. *Pentru $D \in Ds(A), D \neq A$, următoarele sunt echivalente:*

(i) $D \in Irc(A)$,
(ii) În mulţimea $A/D \backslash \{1\}$ *există un element $p \neq 1$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A/D \backslash \{1\}$ există $n \geq 1$ astfel încît $x^n \leq p$.*

Un sistem deductiv al lui A este *sistem deductiv prim minimal* dacă $P \in Spec(A)$ şi pentru orice $Q \in Spec(A)$ cu $Q \subseteq P$ să avem $P = Q$.

Am obţinut că:

Propoziţia 1.57. *Dacă P este un sistem deductiv prim minimal, atunci pentru orice $a \in P$ există $b \in A \backslash P$ astfel încît $a \vee b = 1$.*

Reamintim că un element a din A se numeşte *infinitesimal* dacă $a \neq 1$ şi $a^n \geq a^*$, pentru orice $n \geq 1$; notînd prin $Inf(A)$ mulţimea elementelor infinitesimale ale lui A şi prin $Rad(A)$ intersecţia sistemelor deductive maximale ale lui A, obţinem:

Corolarul 1.66. $Inf(A) \subseteq Rad(A)$.

În final introducem noţiunile de latice reziduată arhimedeană şi hiperarhimedeană şi demonstrăm o teoremă de tip Nachbin pentru latici reziduate.

O latice reziduată A se numeşte *arhimedean*ă dacă sunt satisfăcute condiţiile echivalente ale Lemei 1.67:

Lema 1.67. *În orice latice reziduată A următoarele sunt echivalente:*

(i) Pentru orice $a \in A, a^n \geq a^*$ pentru orice $n \geq 1$ implică $a = 1$;
(ii) Pentru orice $a, b \in A, a^n \geq b^*$ pentru orice $n \geq 1$ implică $a \vee b = 1$;
(iii) Pentru orice $a, b \in A, a^n \geq b^*$ pentru orice $n \geq 1$ implică $a \rightarrow b = b$ şi $b \rightarrow a = a$.

Este uşor de remarcat că o latice reziduată este arhimedeană dacă şi numai dacă nu are elemente infinitesimale.

Un element a al unei latice reziduate A se numeşte *arhimedean* dacă satisface condiţia: există $n \geq 1$, astfel încît $a^n \in B(A)$.

O latice reziduată A se numeşte *hiperarhimedean*ă dacă toate elementele sale sunt arhimedeene. Orice latice reziduată hiperarhimedeană este arhimedeană; dacă A este hyperarhimedeană, atunci pentru orice sistem deductiv D, laticea reziduată A/D este arhimedeană.

Avem următorul rezultat:

Teorema 1.70. *Pentru o latice reziduatăA următoarele sunt echivalente:*

(i) *A este hiperarhimedeană,*
(ii) $Spec(A) = Max(A)$,
(iii) Orice sistem deductiv prim este prim minimal.

şi o teoremă de tip *Nachbin* pentru latici reziduate:

Teorema 1.71. *Pentru o latice reziduatăA următoarele sunt echivalente:*

(i) *A este hiperarhimedeană,*
(ii) $(Spec(A), \subseteq)$ este neordonat.

Capitolul 2 : Localizări de MTL -algebre

Capitolul 2 este dedicat localizării MTL-algebrelor.

Rezultatele originale sunt conţinute în [**82**] şi [**83**].

Reamintim că o *MTL-algebră* ([**41**]) este o latice reziduată satisfăcînd condiţia de preliniaritate:

(MTL) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$

Orice latice reziduată lanţ este o $MTL-$ algebră.

O $MTL-$ algebră A este o $BL-$ algebră dacă în A este verificată divizibilitatea: $x \odot (x \to y) = x \wedge y$. Deci, $BL-$ algebrele sunt exemple de $MTL-$ algebre.

Reamintim proprietăţi de bază ale $MTL-$ algebrelor şi demonstrăm altele noi utile în continuare.

Dacă A este o $MTL-$ algebră vom nota prin $B(A)$ mulţimea *elementelor booleene* din $L(A)$.

Introducem în acest capitol noţiunea de *MTL-algebră de fracţii relativă la un sistem $\wedge$-închis.*

Pentru un *sistem $\wedge$-închis* $S \subseteq A$ ($1 \in S$ şi $x, y \in S$ implică $x \wedge y \in S$) considerăm congruenţa θ_S definită prin:

$$(x, y) \in \theta_S \text{ dacă şi numai dacă există } e \in S \cap B(A) \text{ astfel încît } x \wedge e = y \wedge e.$$

Pentru $x \in A$ notăm prin x/S clasa de echivalenţă a lui x relativă la θ_S şi cu $A[S] = A/\theta_S$. În $A[S]$, $\mathbf{0} = 0/S$, $\mathbf{1} = 1/S$ şi pentru orice $x, y \in A$,

$$x/S \wedge y/S = (x \wedge y)/S, x/S \vee y/S = (x \vee y)/S$$

$$x/S \odot y/S = (x \odot y)/S, x/S \to y/S = (x \to y)/S.$$

Atunci $A[S] = A/\theta_S$ verifică următoarea proprietate de universalitate:

Teorema 2.5. *Dacă A' este o MTL-algebră şi $f : A \to A'$ un morfism de MTL-algebre astfel încît $f(S \cap B(A)) = \{\mathbf{1}\}$, atunci există un unic morfism de MTL-algebre $f' : A[S] \to A'$ astfel încît următoarea diagramă*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_S"] \arrow[dr, "f"'] & A[S] \arrow[d, "f'"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $f' \circ p_S = f$), unde $p_S : A \to A[S]$ este morfismul surjectiv canonic de $MTL-$ algebre.

Acest rezultat ne sugerează să numim $A[S]$ ca *MTL-algebra de fracţii relativă la sistemul $\wedge$-închis S.* Dacă $MTL-$ algebra A este în particular o $BL-$ algebră, atunci $A[S]$ este o $BL-$ algebră.

Urmînd exemplul inelelor şi construcţia lui J. Schmid din ([**89**], [**90**]) mintoduce noţiunea de *MTL-algebră maximală de cîturi* cu ajutorul *multiplicatorilor tari.*

Notăm cu $I(A)$ mulţimea *idealelor ordonate* ale $MTL-$ algebrei $L(A)$:

$$I(A) = \{I \subseteq A : \text{dacă } x, y \in A, x \leq y \text{și } y \in I, \text{atunci } x \in I\}.$$

Prin *multiplicator parţial tare* pe A înţelegem o funcţie $f : I \to A$, cu $I \in I(A)$, ce satisface următoarele axiome:

$(smMTL_1)$ $f(e \odot x) = e \odot f(x)$, pentru orice $e \in B(A)$ şi $x \in I$;
$(smMTL_2)$ $x \odot (x \to f(x)) = f(x)$, pentru orice $x \in I$;
$(smMTL_3)$ Dacă $e \in I \cap B(A)$, atunci $f(e) \in B(A)$;
$(smMTL_4)$ $x \wedge f(e) = e \wedge f(x)$, pentru orice $e \in I \cap B(A)$ şi $x \in I$ (de notat că $e \odot x \in I$ deoarece $e \odot x \leq e \wedge x \leq x$).

Din $smMTL_2$ deducem $(smMTL_5) : f(x) \leq x$, pentru orice $x \in I$;

Dacă A este o BL algebră, atunci $smMTL_2$ este o consecinţă a lui $smMTL_5$.

Prin $dom(f) \in I(A)$ notăm domeniul lui f; dacă $dom(f) = A$, vom spune că f este *total*.

Pentru simplificarea limbajului, prin *multiplicator tare* vom desemna *multiplicatorul parţial tare,* folosind *total* pentru a indica faptul că domeniul multiplicatorului tare este A.

Funcţiile $\mathbf{0}, \mathbf{1} : A \to A$ definite prin $\mathbf{0}(x) = 0$ şi $\mathbf{1}(x) = x$, pentru orice $x \in A$ sunt multiplicatori totali tari pe A. Pentru $a \in B(A)$ şi $I \in I(A)$ funcţia $f_a : I \to A$ definită prin $f_a(x) = a \wedge x$, pentru orice $x \in I$ este multiplicator tare pe A (numit *multiplicator principal tare*). Dacă $dom(f_a) = A$, notăm f_a prin $\overline{f_a}$.

Pentru $I \in I(A)$, notăm

$$M(I, A) = \{f : I \to A \mid f \text{ este multiplicator tare în } A\}$$

şi

$$M(A) = \bigcup_{I \in I(A)} M(I, A).$$

Dacă $I_1, I_2 \in I(A)$ şi $f_i \in M(I_i, A), i = 1, 2$, atunci

$f_1(x) \odot [x \to f_2(x)] = f_2(x) \odot [x \to f_1(x)]$, pentru orice $x \in I_1 \cap I_2$.

Pentru $I_1, I_2 \in I(A)$ şi $f_i \in M(I_i, A), i = 1, 2$, definim $f_1 \wedge f_2$, $f_1 \vee f_2$, $f_1 \otimes f_2$, $f_1 \rightsquigarrow f_2 : I_1 \cap I_2 \to A$ prin

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x),$$
$$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x),$$
$$(f_1 \otimes f_2)(x) = f_1(x) \odot [x \to f_2(x)] \overset{mtl-c_7}{=} f_2(x) \odot [x \to f_1(x)],$$
$$(f_1 \rightsquigarrow f_2)(x) = x \odot [f_1(x) \to f_2(x)],$$

pentru orice $x \in I_1 \cap I_2$.

Obţinem :

Propoziţia 2.14. $(M(A), \wedge, \vee, \otimes, \rightsquigarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *este o MTL-algebră.*

Funcţia $v_A : B(A) \to M(A)$ definită prin $v_A(a) = \overline{f_a}$ pentru orice $a \in B(A)$ este un monomorfism de MTL-algebre.

O mulţime nevidă a unei latice reziduate $I \subseteq A$ se numeşte *regulată* dacă pentru orice $x, y \in A$, $x \wedge e = y \wedge e$ pentru orice $e \in I \cap B(A)$, implică $x = y$.

Notăm prin

$$M_r(A) = \{f \in M(A) : dom(f) \in I(A) \cap R(A)\},$$

unde

$$R(A) = \{I \subseteq A : I \text{ este submulţime regulată a lui } A\}.$$

Pe $M_r(A)$ considerăm congruenţa ρ_A definită prin

$(f_1, f_2) \in \rho_A$ dacă şi numai dacă f_1şi f_2 coincid pe intersecţia domeniilor lor.

Pentru $f \in M_r(A)$ cu $I = dom(f) \in I(A) \cap R(A)$, vom nota prin $[f, I]$ clasa de echivalenţă a lui f modulo ρ_A iar prin $A'' = M_r(A)/\rho_A$, care este o algebră Boole (vezi Remarca 2.14.).

Fie $\overline{v_A} : B(A) \to Q(A)$ definită prin $\overline{v_A}(a) = [\overline{f_a}, A]$ pentru orice $a \in B(A)$. Atunci:

(i) $\overline{v_A}$ este morfism de MTL algebre;
(ii) Pentru orice $a \in B(A)$, $[\overline{f_a}, A] \in B(A'')$;
(iii) $\overline{v_A}(B(A)) \in R(A'')$.

Deoarece pentru orice $a \in B(A)$, $\overline{f_a}$ este unicul multiplicator tare maximal din $[\overline{f_a}, A]$ putem identifica $[\overline{f_a}, A]$ cu $\overline{f_a}$. Deci, $\overline{v_A}$ fiind injecţie, elementele lui $B(A)$ pot fi identificate cu elemente ale mulţimii $\{ \overline{f_a} : a \in B(A)\}$.

Vom introduce noţiunile de *MTL-algebră de fracţii* şi *MTL-algebră maximală de cîturi* şi vom proba existenţa acesteia.

Dacă A este o MTL algebră, o MTL-algebră F se numeşte *MTL-algebră de fracţii a lui A* dacă:

$(fr - MTL_1)$ $B(A)$ este o MTL subalgebră a lui F;
$(fr - MTL_2)$ Pentru orice $a', b', c' \in F, a' \neq b'$, există $e \in B(A)$ astfel ca $e \wedge a' \neq e \wedge b'$ şi $e \wedge c' \in B(A)$.

Convenim să notăm prin $A \preceq F$ faptul că F este MTL-algebra de fracţii a lui A.

$Q(A)$ se numeşte *MTL-algebra maximală de cîturi a lui A* dacă $A \preceq Q(A)$ şi pentru orice MTL-algebră F cu $A \preceq F$, există un morfism injectiv de MTL-algebre $i : F \to Q(A)$.

Dacă $A \preceq F$, atunci F este algebră Boole deci şi $Q(A)$ este algebră Boole.

Un important rezultat este:

Teorema 2.25 A'' este MTL algebra maximală de cîturi $Q(A)$ a lui A.

Vom introduce pe o MTL - algebră noţiunea de *topologie* asemănător cu cazul cazul inelelor sau laticelor distributive. Vom studia noţiunile de *MTL - algebră de localizare şi MTL - algebră de localizare tare a unei $MTL-$ algebre A relativ la topologia $\mathcal{F}$ de pe A*; le vom nota pe acestea prin $A_{\mathcal{F}}$ şi $s - A_{\mathcal{F}}$ şi vom proba că MTL - algebra maximală de cîturi şi MTL - algebra de fracţii relativă la un sistem $\wedge-$ închis sunt MTL - algebre de localizare tari.

Vom defini noţiunea de *$\mathcal{F}-$ multiplicator,* unde $\mathcal{F}$ este o topologie pe $MTL-$ algebra A.

O mulţime nevidă $\mathcal{F}$ de elemente $I \in I(A)$ se numeşte *topologie pe A* dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

(top_1) dacă $I_1 \in \mathcal{F}, I_2 \in I(A)$ şi $I_1 \subseteq I_2$, atunci $I_2 \in \mathcal{F}$,
(top_2) pentru $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$, avem $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ -multiplicatorii vor fi utilizaţi în construcţia *$MTL-$ algebrei de localizare* $A_{\mathcal{F}}$ relativ la topologia $\mathcal{F}$.

Definim congruenţa $\theta_{\mathcal{F}}$ pe A prin:

$$(x, y) \in \theta_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \text{dacă există } I \in \mathcal{F} \text{ astfel ca } e \wedge x = e \wedge y \text{ pentru orice } e \in I \cap B(A).$$

Un $\mathcal{F}-$ multiplicator este o funcţie $f : I \to A/\theta_{\mathcal{F}}$, unde $I \in \mathcal{F}$ şi pentru orice $x \in I$ and $e \in B(A)$ sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(mMTL_1)$ $f(e \odot x) = e/\theta_{\mathcal{F}} \wedge f(x) = e/\theta_{\mathcal{F}} \odot f(x)$,

$(mMTL_2)$ $x/\theta_{\mathcal{F}} \odot (x/\theta_{\mathcal{F}} \to f(x)) = f(x)$.

Prin $M(I, A/\theta_{\mathcal{F}})$ desemnăm mulţimea tuturor $\mathcal{F}-$ multiplicatorilor cu domeniul $I \in \mathcal{F}$ şi

$$M(A/\theta_{\mathcal{F}}) = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} M(I, A/\theta_{\mathcal{F}}).$$

Dacă $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$, $I_1 \subseteq I_2$ avem aplicaţia canonică $\varphi_{I_1,I_2} : M(I_2, A/\theta_{\mathcal{F}}) \to M(I_1, A/\theta_{\mathcal{F}})$ definită prin $\varphi_{I_1,I_2}(f) = f_{|I_1}$ pentru $f \in M(I_2, A/\theta_{\mathcal{F}})$.

Considerăm sistemul direct de mulţimi

$$\left\langle \{M(I, A/\theta_{\mathcal{F}})\}_{I \in \mathcal{F}}, \{\varphi_{I_1,I_2}\}_{I_1,I_2 \in \mathcal{F}, I_1 \subseteq I_2} \right\rangle$$

şi notăm prin $A_{\mathcal{F}}$ limita inductivă în categoria mulţimilor:

$$A_{\mathcal{F}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} M(I, A/\theta_{\mathcal{F}}).$$

Pentru un $\mathcal{F}-$ multiplicator $f : I \to A/\theta_{\mathcal{F}}$ vom nota prin $\widehat{(I, f)}$ clasa de echivalenţă a lui f în $A_{\mathcal{F}}$.

Dacă $f_i : I_i \to A/\theta_{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2$, sunt $\mathcal{F}-$ multiplicatori, atunci $\widehat{(I_1, f_1)} = \widehat{(I_2, f_2)}$ (în $A_{\mathcal{F}}$) dacă şi numai dacă există $I \in \mathcal{F}$, $I \subseteq I_1 \cap I_2$ astfel încît $f_{1|I} = f_{2|I}$.

Fie $f_i : I_i \to A/\theta_{\mathcal{F}}$, (cu $I_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$), $\mathcal{F}-$ multiplicatori. Considerăm funcţiile $f_1 \wedge f_2, f_1 \vee f_2, f_1 \odot f_2, f_1 \to f_2 : I_1 \cap I_2 \to A/\theta_{\mathcal{F}}$ definite prin

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x), (f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x),$$

$$(f_1 \odot f_2)(x) = f_1(x) \odot [x/\theta_{\mathcal{F}} \to f_2(x)] \overset{mtl-c_8}{=} f_2(x) \odot [x/\theta_{\mathcal{F}} \to f_1(x)],$$

$$(f_1 \to f_2)(x) = x/\theta_{\mathcal{F}} \odot [f_1(x) \to f_2(x)],$$

pentru orice $x \in I_1 \cap I_2$, şi fie

$$\widehat{(I_1, f_1)} \curlywedge \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \wedge f_2), \widehat{(I_1, f_1)} \curlyvee \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \vee f_2),$$

$$\widehat{(I_1, f_1)} \otimes \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \odot f_2), \widehat{(I_1, f_1)} \longmapsto \widehat{(I_2, f_2)} = (I_1 \cap \widehat{I_2, f_1} \to f_2).$$

Astfel, $(A_{\mathcal{F}}, \curlywedge, \curlyvee, \otimes, \longmapsto, \mathbf{0} = \widehat{(A, \mathbf{0})}, \mathbf{1} = \widehat{(A, \mathbf{1})})$ devine o MTL-algebră numită *$MTL-$ algebra de localizare a lui A relativ la topologia $\mathcal{F}$* .

Pentru a obţine MTL - algebra maximală de cîturi $Q(A)$ ca o MTL -algebră de localizare relativă la o topologie $\mathcal{F}$ vom dezvolta o nouă teorie a multiplicatorilor (adăugînd două noi axiome $\mathcal{F}$- multiplicatorilor pe care îi vom numi *$\mathcal{F}$-multiplicatori tari*).

Aceste două noi axiome sunt:

$(mMTL_3)$ Dacă $e \in I \cap B(A)$, atunci $f(e) \in B(A/\theta_{\mathcal{F}})$,

$(mMTL_4)$ $(x/\theta_{\mathcal{F}}) \wedge f(e) = (e/\theta_{\mathcal{F}}) \wedge f(x)$, pentru orice $e \in I \cap B(A)$ şi $x \in I$.

Analog cu cazul $\mathcal{F}-$ multiplicatorilor dacă lucrăm cu $\mathcal{F}-$ multiplicatori tari obţinem o $MTL-$ subalgebră a lui $A_{\mathcal{F}}$ notată prin $s - A_{\mathcal{F}}$ şi numită *$MTL-$ algebra de localizare tare a lui A relativ la topologia $\mathcal{F}$.*

De asemenea, vom descrie MTL-algebra de localizare $A_{\mathcal{F}}$ în anumite cazuri speciale:

Dacă considerăm structura Łukasiewicz $A = I = [0, 1]$ şi $\mathcal{F}$ topologia $\mathcal{F}(I) = \{I' \in \mathcal{I}(A) : I \subseteq I'\}$ atunci $A_{\mathcal{F}}$ nu este o algebră Boole.

Pentru $\mathcal{F} = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{R}(A)$, $s - A_{\mathcal{F}}$ este exact MTL-algebra maximală de cîturi $Q(A)$ a lui A.

Dacă $\mathcal{F}_S$ este topologia asociată unui sistem $\wedge-$ închis $S \subseteq A$, atunci MTL-algebra $s - A_{\mathcal{F}_S}$ este izomorfă cu $B(A[S])$.

Capitolul 3 : Localizări de Pseudo MTL - algebre

În acest capitol, dezvoltăm - urmînd modelul MTL -algebrelor - o teorie a localizării pentru pseudo MTL - algebre, generalizări necomutative ale acestora. Ideea este de a generaliza pentru pseudo $MTL-$ algebre noţiunile de $MTL-$ algebră a multiplicatorilor, $MTL-$ algebră de fracţii şi $MTL-$ algebră maximală de cîturi. Structura, metodele şi tehnicile sunt analoage celor din Capitolul 2 (dar nu identice, regulile de calcul fiind destul de dificile).

Reamintim că o *pseudo $MTL-$ algebră* ([**43**]) este o algebră $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ de tipul $(2, 2, 2, 2, 2, 0, 0)$ satisfăcînd următoarele axiome:

($psMTL_1$) $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ este o latice mărginită relativ la ordinea $\leq$;

($psMTL_2$) $(A, \odot, 1)$ este monoid;

($psMTL_3$) $x \odot y \leq z$ dacă şi numai dacă $x \leq y \rightarrow z$ iff $y \leq x \rightsquigarrow z$, pentru orice $x, y, z \in A$;

($psMTL_4$) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$, pentru orice $x, y \in A$ (pseudo-preliniaritate).

Dacă A satisface numai axiomele $psMTL_1, psMTL_2, psMTL_3$ atunci A se numeşte *latice pseudo reziduată*. Dacă în plus pentru orice $x, y \in A$ pseudo MTL algebra A satisface şi axioma

($psMTL_5$) $(x \rightarrow y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y) = x \wedge y$ (pseudo-divizibilitatea), atunci A devine o *pseudo BL- algebră.*

O pseudo MTL- algebră A se numeşte *comutativă* dacă operaţia $\odot$ este comutativă. În acest caz operaţiile $\rightarrow$ şi $\rightsquigarrow$ coincid, deci o pseudo-MTL algebră comutativă este o MTL algebră.

În acest capitol prin A am notat universul unei pseudo $MTL-$ algebre iar prin $C(A) = \{x \in A : x \odot (x \rightsquigarrow a) = (x \rightarrow a) \odot x$, pentru orice $a \leq x, a \in A\}$ (evident, dacă A este o $MTL-$ algebră sau o pseudo $BL-$ algebră, atunci $C(A) = A$.)

De asemenea, vom nota prin $\mathcal{I}(A) = \{I \subseteq A :$ dacă $x, y \in A, x \leq y$ şi $y \in I$, atunci $x \in I\}$ şi prin $\mathcal{I}'(A) = \{I = J \cap C(A), J \in \mathcal{I}(A)\}$.

Deci, în cazul pseudo $MTL-$ algebrelor vom înlocui $\mathcal{I}(A)$ prin $\mathcal{I}'(A)$.

Dacă A este o $MTL-$ algebră sau o pseudo $BL-$ algebră, atunci $\mathcal{I}'(A) = \mathcal{I}(A)$ este mulţimea idealelor ordonate ale lui A.

Rezultatele originale ale acestui capitol sunt conţinute în [**62**].

Capitolul 4 : Probleme deschise şi noi direcţii de cercetare

Acest capitol conţine cîteva probleme deschise din tematica tezei:

1. Caracterizarea MTL-algebrelor A cu proprietatea că $Ds(A)$ este latice Stone (respectiv, latice normală sau co-normală, MV algebră, LMn algebră).
2. Problema unicităţii (pînă la un izomorfism) a MTL-algebrei (pseudo MTL-algebrei) maximale de cîturi $Q(A)$ pentru o MTL-algebră A.
3. O construcţie non-standard a MTL-algebrei (pseudo MTL-algebrei) maximale de cîturi ca în cazul laticilor (vezi [**90**]).
4. Un studiu al localizării neutilizînd centrul boolean.
5. Translatarea anumitor proprietăţi ale sistemelor deductive în cazul idealelor din inelele comutative.

şi noi direcţii de cercetare:

1. Dezvoltarea unei teorii a localizării pentru latici reziduate (în cazul comutativ şi necomutativ).
2. Un studiu al filtrelor pure şi al topologiei stabile pe o latice reziduată.
3. Obţinera unor descompuneri ortogonale pentru spaţiul filtrelor prime ale unei latici reziduate.
4. Extinderea la cazul necomutativ a rezultatelor obţinute în [**23**].
5. Un studiu al filtrelor pure minimale ale unei latici reziduate.
6. Studiul structurii MTL algebrei de localizare pentru algebra Lindenbaum-Tarski a logicii MTL şi reflecţia proprietăţilr logicii MTL în acestă structură algebrică.
7. Studiul pentru o MTL algebră A a diferitelor tipuri de sisteme deductive în $A_{\mathcal{F}}$ în conexiune cu cele din A.
8. Studiul rezultatelor obţinute în acestă teză în conexiune cu alte domenii ca: topologia, logica, informatica, etc.

Bibliography

[1] V. M. Abrusci, P. Ruet, *Non-commutative logic I: the multiplicative frequent*, Annals pure appl. Logic, 101 (2000), 29-64.

[2] R. Balbes, Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[3] R. Bandot, *Non-commutative logic programming language NoCLog.*, In: Symposium LCCS 2000 (Santa Barbara), short presentation (3pp).

[4] L. P. Belluce, S. Sessa, *Orthogonal Decompositions of MV-spaces*, Mathware and Soft Computing 4 (1997), 5-22.

[5] L. P. Belluce, S. Sessa, *The stable topology for MV-algebras*, Quaestiones Math. 23, no.3 (2000), 269-277.

[6] G. Birkfoff, *Lattice theory (3rd ed.)*, Colloquim Publications 25, Amer. Math. Soc, 1967.

[7] T. S. Blyth, M. F. Janovitz, *Residuation Theory*, Pergamon Press, 1972.

[8] W. J. Blok, D. Pigozzi, *Algebraizable Logics*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 396, Amer. Math. Soc, Providence, 1989.

[9] K. Blount, C. Tsinakis, *The structure of residuated lattices*, Internat. J. Algebra Comput., 13, no.4 (2003), 437-461.

[10] A. Brezuleanu, R. Diaconescu *Sur la duale de la categorie des treillis*, Rev. Roum. Math. Pures et Appliquees, 14, no.3 (1969), 311-329.

[11] S. Buris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, No. 78, Springer, 1981.

[12] D. Buşneag, *Contribuţii la studiul algebrelor Hilbert*, Ph. D. Thesis, Universitatea din Bucureşti, 1985.

[13] D. Buşneag, *F-multipliers and the localization of Hilbert algebras*, Zeitschr. f. math. Logik and Grundlagen d. Math., Bd. 36, (1990), 331-338.

[14] D. Buşneag, D. Piciu, *Localization of MV-algebras and lu-group*, Algebra Univers. **50** (2003), 359-380.

[15] D. Buşneag, D. Piciu, *BL-algebra of fractions relative to an $\wedge$-closed system*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius, Constanţa, Seria Matematică, vol. XI, fascicola 1 (2003), 39-48.

[16] D. Buşneag, D. Piciu, *On the lattice of deductive systems of a BL-algebra*, Central European Journal of Mathematics-CEJM **2** (2003), 221-237.

[17] D. Buşneag, D. Piciu, *BL-algebra of fractions and maximal BL-algebra of quotients*, Soft Computing, 9 (2005), 544-555.

[18] D. Buşneag, D. Piciu, *Localization of pseudo BL-algebras,* Rev. Rou. de Math. pures et appliquees, Tome L, No.5-6 (2005), 495-513.

[19] D. Buşneag, D. Piciu, *Boolean MV-algebras of fractions,* Math. Reports , Volume **7**(57), No.4 (2005), 265-280.

[20] D. Buşneag, D. Piciu, *Localization of BL-algebras,* Soochow Journal of Mathematics, Volume **32**, No.1 (2006), 127-159.

[21] D. Buşneag, D. Piciu, *Residuated lattice of fractions relative to a $\wedge$-closed system*, Bull. Math. Sc. Math. Roumanie, Tome 49 (97), No. 1, (2006), 13-24.

[22] D. Buşneag, D. Piciu, *Localization of pseudo MV-algebras and l-groups with strong unit, ,* Int. Rev. of Fuzzy Math. -IRFM, vol.2, No.1 (2007), 63-95.

[23] D. Buşneag, D. Piciu, **A. Jeflea**, *Archimedean residuated lattices*, submited to Analele Stiintifice ale Univ. A. I. Cuza, Iaşi , Sectiunea Matematica.

[24] C. Cabrer, S. Celani, *Pristley dualities for some lattice-ordered algebraic structures including MTL, IMTL and MV-algebras*, Central European Journal of Mathematics-CEJM 4(4) (2006), 600-623.

[25] F. Chirteş, *Contribution to the study of LMn-algebras,* Ph. D. Thesis, University of Bucharest, 2006.

[26] R. Cignoli, I.M.L. D'Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic foundation of many-valued reasoning*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2000.

[27] R. Cignoli, A. Torrens, *An algebraic analysis of product logic*, (preprint), (1998).

[28] L. Ciungu, *Classes of residuated lattices*, Annals of the Univ. of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 33 (2006), 189-207.

[29] L. Ciungu, *Some classes of pseudo-MTL algebras*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 50 (98), No. 3, (2007), 223-247.

[30] L. Ciungu, *Algebraic models for multiple-valued logics, States and convergences on multiple-valued logic algebra*, Ph. D. Thesis, University of Bucharest, 2007.

[31] L. Ciungu, *The radical of a perfect residuated structure*, Informatics Sciences, 179 (2009), 2695-2709.

[32] W. H. Cornish, *The multiplier extension of a distributive lattice*, Journal of Algebra, 32 (1974), 339-355.

[33] W. H. Cornish, *A multiplier approach to implicative BCK-algebras*, Mathematics Seminar Notes, Kobe University, 8, No.1, 1980.

[34] C. Dan, *Contribuţii la studiul algebrelor implicative*, Ph. D. Thesis, Universitatea din Bucureşti, 2002.

[35] D. Diaconescu, G. Georgescu, *On the Forcing Semantics for Monoidal t-norm Based Logi*c, J. of Univ. Comput. Sci., vol.13, no. 11 (2007), 1550-1572.

[36] D. Diaconescu, *Kripke-style semantics for non-commutative monoidal t-norm logic*,draft, 2008.

[37] A. Diego, *Sur les algèbres de Hilbert*, Ed. Hermann, Collection de Logique Mathématique, Serie A, XXI, Paris, (1966).

[38] R. P. Dilworth, *Non-commutative residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society 46 (1939), 426-444.

[39] A. Di Nola, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-BL algebras: Part I,II,* Multiple Valued Logic, 8, No.5-6 (2002), 673-714, 717-750.

[40] E. Eslami, F. Kh. Haghani, *Pure filters and stable topology on BL-algebras*, Kybernetika, Vol.45, no.3 (2009), 491-506.

[41] F. Esteva, L. Godo, *Monoidal t-norm based logic : towards a logic for left-continuous t-norms*, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001), 271-288.

[42] P. Flondor, *Non-commutative connective*, Stud. Inform. Control, 9 (2000), 335-337.

[43] P. Flondor, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo t-norms and pseudo-BL algebras*, Soft Computing, 5, No 5 (2001), 355-371.

[44] H. Freytes, *Injectives in residuated algebras*, Algebra universalis, 51 (2004), 373-393.

[45] P. Gabriel, *Des categories abeliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448.

[46] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated lattices: an algebraic glimpse at structural logic*, Studies in Logic and the foundations of math., Vol. 151, Elsevier Science, 2007.

[47] G. Georgescu, *F-multipliers and the localization of distributive lattices,* Algebra Universalis, 21 (1985), 181-197.

[48] G. Georgescu, M. Ploščica, *Values and minimal spectrum of an algebraic lattice*, Math. Slovaca, **52** No.3, (2002), 247-253.

[49] G. Georgescu, A. Popescu, *Non-commutative fuzzy structures and pairs of weak negations*, Fuzzy Sets and Systems, 143 (2004), 129-135.

[50] G. Grätzer, *Lattice theory*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[51] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1998.

[52] P. Hájek, J. Ševčik, *On fuzzy predicate calculi with non-commutative conjunction*, Soft Computing., 5 (2001), 355-371.

[53] P. Hájek, *Fuzzy logics with non-commutative conjunctions*, J. Logic Comput. 13, (2003), 469-479.

[54] P. Hájek, *Observations on non-commutative fuzzy logic*, Soft Computing. 8 (2003), 38-43.

[55] U. Hőhle, *Commutative residuated monoids*, in: U. Hőhle, P. Klement (eds), Non-classical Logics and Their Aplications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[56] R. Horčik, *Stronger version of standard completeness theorem for MTL*, EUSFLAT-LFA (2005), 878-883.

[57] P. M. Idziak, *Lattice operations in BCK-algebras*, Mathematica Japonica, 29(1984), 839-846.

[58] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra (in romanian)*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[59] A. Iorgulescu: *Classes of BCK algebras-Part III,* Preprint Series of The Institute of Mathematics of the Romanian Academy, preprint nr.3 (2004), 1-37.

[60] A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Ed. ASE, Bucharest, 2008.

[61] A. Iorgulescu, S. Marcus, S. Rudeanu, D. Vaida (Editors), *Grigore C. Moisil and his followers*, Ed. Academiei Romane, Bucharest, 2007.

[62] **A. Jeflea**, *Localization of pseudo MTL-algebras*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Series, Vol. 36(1) (2009), 122-144 .

[63] **A. Jeflea**, R. Cretan, *On the lattice of congruence filters of a residuated lattice*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Series, Vol. **33** (2006), 174-188.

[64] S. Jenei, F. Montagna, *A proof of standard completeness for non-commutative monoidal t-norm logic*, Neural Network World, 13 (2003), 481-488.

[65] P. T. Johstone, *Stone Spaces*, Cambridge Universiry Press, 1982.

[66] E.P.Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[67] T. Kowalski, *The bottom of the lattice of BCK-varieties,* Reports on mathematical Logic, 29(1995), 87-93.

[68] T. Kowalski, H. Ono, *Residuated lattices: an algebraic glimpse at logic without contraction*, monograph, 2001.

[69] W. Krull, *Axiomatische Begründung der allgemeinen Ideal theorie*, Sitzungsberichte der physikalisch medizinischen Societäd der Erlangen 56 (1924), 47-63.

[70] J. Kühr, *Prime ideals and polars in DRL-monoids and pseudo-BL algebras,* Math. Slovaca, **53** (2003), 233-246.

[71] J. Kühr, *Pseudo-BCK-algebras and related structures*, Univerzita Plackého v Olomouci, 2007.

[72] J. Lambek, *The mathematics of sentence structure*, American Math. Month. 12 (1958), 166-178.

[73] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company, 1966.

[74] L. Leuştean, *Representations of many-valued algebras*, Ph. D. Thesis, University of Bucharest, 2003.

[75] C. Năstăsescu, *Inele. Module. Categorii.*, Ed. Academiei, Bucureşti, (1976).

[76] W. Nemitz, *Semi-Boolean lattices*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol.10, No.3 (1969), 235-238.

[77] M. Okada, K. Terui, *The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic*, Journal of Symbolic Logic, 64 (1999), 790-802.

[78] H. Ono, Y. Komori, *Logics without the contraction rule*, Journal of Symbolic Logic, 50 (1985), 169-201.

[79] J. Pavelka, *On fuzzy logic II. Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculi*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 25 (1979), 119-134.

[80] D. Piciu, *Localization of BL and MV algebras*, Ph. D. Thesis, University of Bucharest, 2004.

[81] D. Piciu, *Algebras of fuzzy logic*, Ed. Universitaria, Craiova, 2007.

[82] D. Piciu, **A. Jeflea**, *MTL algebras of fractions and maximal MTL algebras of quotients*, submited to Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de Roumanie.

[83] D. Piciu, **A. Jeflea**, *Localization of MTL algebras*, Conference : Algebra and Probability in Many-Valued Logics, Darmstadt, May 7-9, 2009.

[84] D. Piciu, **A. Jeflea**, R. Cretan, *On the lattice of deductive systems of a residuated lattice*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Series, Volume **35** (2008), 199-210.

[85] N. Popescu, *Abelian categories*, Ed. Academiei, Bucureşti, (1971).

[86] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, New York (1973).

[87] N. Popescu, L. Popescu, *Theory of categories,* Ed. Academiei, Bucureşti si Ed. Sijthoff & Noordhoff International Publishers, (1979).

[88] S. Rudeanu, *Localizations and Fractions in Algebra of Logic*, to appear in Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing (38 pages).

[89] J. Schmid, *Multipliers on distributive lattices and rings of quotients*, Houston Journal of Mathematics, vol.6, no. 3 (1980), 401-425.

[90] J. Schmid, *Distributive lattices and rings of quotients*, Coll. Math. Societatis Janos Bolyai, 33, Szeged, Hungary, (1980).

[91] B. Strenström, *Platnes and localization over monoids*, Math. Nachrichten **48** (1971), 315-334.

[92] E. Turunen, *Mathematics Behind Fuzzy Logic*, Physica-Verlag, 1999.

[93] P. Vojtáš, *Fuzzy logic programming*, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001), 361-370.

[94] P. Vojtáš, J. Paulik, *Soudness and completeness of non-classical extended resolution*, In Proc. ELP'96, Lect. Notes Comput. Sci. 1050, Springer-Verlag (1996), 289-301.

[95] M. Ward, *Residuated distributive lattices*, Duke Mathematical Journal 6 (1940), 641-651.

[96] M. Ward, R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society 45 (1939), 335-354.