

## **”Probleme Unilaterale în Fizica Matematică”**

Teza conține 12 capitole. În primul capitol sunt prezentate noțiuni preliminare din analiza funcțională care vor fi utilizate în capitolele următoare. Sunt prezentate noțiuni din analiza convexă, analiza nenetedă precum și o serie de teoreme și rezultate ce vor juca un rol cheie în demonstrarea rezultatelor principale stabilite pe parcursul acestei teze.

Cu excepția acestui prim capitol, toate celelalte capitole sunt bazate pe rezultate originale publicate sau în curs de publicare în reviste de specialitate din țară și străinătate și sunt structurate în trei părți:

- **PARTEA I: Inegalități hemivariaționale** (Capitolele 2-6) este dedicată studiului unor clase de inegalități hemivariaționale pentru care sunt prezentate rezultate de existență și, pentru o parte din ele, sunt demonstrate rezultate de unicitate sau chiar stabilitate a soluției.
- **PARTEA II: Probleme de contact cu frecare** (Capitolele 7-9) se concentrează pe solvabilitatea slabă a unor modele din mecanică ce descriu contactul dintre un corp și un obstacol rigid numit fundație. Procesele sunt statice, iar materialele sunt considerate elastice, dar nu neaparat liniare. În general frecarea este modelată utilizând condiții la limită în care apare gradientul generalizat Clarke, ceea ce determină ca formularea variațională a acestor probleme să conducă la inegalități hemivariaționale sau variațional-hemivariaționale, deci în concluzie la *probleme unilaterale din fizica matematică* așa cum indică și titlul tezei.
- **PARTEA III: Probleme de valori proprii neliniare** (Capitolele 10-12) este dedicată studiului unei clase de probleme în care apar puncte singulare și/sau degenerate. Pe parcursul acestei părți sunt demonstrate rezultate de existență și unicitate a soluției slabe pentru anumite ecuații cu derivate parțiale eliptice în care apar operatori liniari sau quasi-liniari precum operatorul lui Laplace. Rezultatele obținute arată o proprietate cel puțin interesantă, mai precis, prin perturbarea unei probleme clasice, care posedă familie discretă și cel mult numărabilă de valori proprii, obținem o nouă clasă de probleme care posedă un spectru continuu ce se concentrează în jurul originii chiar dacă originea nu este valoare proprie a problemei inițiale.

# Cuprins

## Prefata

## Lista de simboluri

### 1. Elemente de analiza functionala

- 1.1. Spatii liniare, operatori liniari si convergenta slaba
- 1.2. Elemente de analiza convexa
- 1.3. Elemente de analiza neneteda
- 1.4. Rezultate utile

## Partea I: Inegalitati Hemivariationale

### 2. Rezultate de existenta pentru inegalitati hemivariationale in care apar operatori relaxat $\eta - \alpha$ monotoni

- 2.1. Introducere
- 2.2. Cadrul abstract
- 2.3. Rezultatele principale

### 3. Despre o clasa de inegalitati variational-hemivariationale in care apar operatori multivoci

- 3.1. Cadrul abstract
- 3.2. Rezultate de existenta

### 4. Rezultate de tip Hartman-Stampacchia pentru operatori stabil pseudomonotoni si inegalitati hemivariationale neliniare

- 4.1. Introducere
- 4.2. Inegalitati hemivariationale de tip Hartman-Stampacchia
- 4.3. Rezultate de existenta pentru inegalitati hemivariationale neliniare si aplicatii
  - 4.3.1. Rezultate de existenta
  - 4.3.2. Aplicatii

### 5. Inegalitati hemivariationale neliniare si aplicatii in mecanica neneteda

- 5.1. Ipoteze si rezultatele principale
- 5.2. Demonstratia rezultatelor principale
- 5.3. Posibile aplicatii
  - 5.3.1. Cazul neconvex al problemei semipermeabilitatii
  - 5.3.2. Probleme de antiplane de contact de depind de alunecare
  - 5.3.3. Inegalitati variational-hemivariationale de tip Hartman-Stampacchia

## **6. Rezultate de existenta si unicitate pentru o clasa de inegalitati quasi-hemivariationale**

- 6.1. Introducere
- 6.2. Ipoteze si rezultate auxiliare
- 6.3. Rezultatele pricipale

## **Partea II: Probleme de Contact cu Frecare**

### **7. Solutii slabe pentru probleme antiplane neliniare ce conduc la inegalitati hemivariationale**

- 7.1. Introducere
- 7.2. Modelul studiat
- 7.3. Ipoteze si solutii slabe
- 7.4. Rezultatul principal
- 7.5. Exemple de legi constitutive
- 7.6. Exemple de legi de frecare
- 7.7. Comentarii

### **8. Deformarea antiplana a unui corp piezoelectric aflat in contact cu o fundatie incarcata electric**

- 8.1. Introducere
- 8.2. Modelul studiat
- 8.3. Ipoteze si formularea variationala
- 8.4. Solvabilitatea slaba a modelului

### **9. Modele pentru probleme de contact ce conduc la inegalitati variational-hemivariationale**

- 9.1. Introducere
- 9.2. Notatii
- 9.3. Formularea problemei, ipoteze si formularea variationala
- 9.4. Rezultatele principale
- 9.5. Exemple de legi constitutive
- 9.6. Exemple de legi de frecare

## **Partea III: Probleme de valori proprii neliniare**

### **10. Probleme de valori proprii neliniare, degenerate si singulare pe intreg spatiul $\mathbb{R}^N$**

- 10.1. Introducere si rezultatul principal
- 10.2. Demonstratia rezultatului principal

## 11. Despre o problema de valori proprii in care apar conditii de crestere cu exponent variabil

- 11.1. Introducere si rezultatul principal
- 11.2. Rezultate auxiliare
- 11.3. Demonstratia rezultatului principal
- 11.4. Comentarii si remarci

## 12. Familie continua de valori proprii ce se concentreaza in la dreapta originii pentru o familie de probleme la limita discrete

- 12.1. Introducere si rezultatele principale
- 12.2. Demonstratia Teoremei 12.1
- 12.3. Demonstratia Teoremei 12.2

## Bibliografie

## Index

**Capitolul 2** are la bază lucrarea *Existence results for hemivariational inequalities involving relaxed  $\eta - \alpha$  monotone mappings* publicată în *Communications in Applied Analysis*. În acest capitol sunt prezentate extensii și generalizări ale rezultatelor obținute de Panagiotopoulos, Fundo și Rădulescu în lucrarea *Existence theorems of Hartman-Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications*. Noutatea acestui capitol constă în relaxarea ipotezei de monotonie, diferite exemple menite să arate ca rezultatele din acest capitol se adresează unei clase mai largi de operatori fiind furnizate.

**Capitolul 3** are la bază lucrarea *On a class of variational-hemivariational inequalities involving set valued mappings* publicată în *Advances in Pure and Applied Mathematics*. Cu ajutorul Principiului KKM al lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz în acest capitol sunt stabilite diferite rezultate de existență pentru inegalități variațional-hemivariaționale în care apar operatori multivoci monotoni, în cazul submultimilor închise și convexe, atât mărginite cât și nemărginite. Diferitele exemple furnizate arată că inegalitatea studiată este foarte generală, mai precis, pentru o alegere convenabilă a membrilor ei, problema propusa poate deveni o inegalitate variațională generalizată, o inegalitate hemivariațională de tip Hartman-Stampacchia, o inegalitate variațională mixtă sau chiar o inegalitate variațională clasică. Rezultatele din acest capitol nu numai că îmbunătățesc rezultate cunoscute din literatura de specialitate, dar permit o abordare unitară a problemelor în care apar inegalități.

**Capitolul 4** se bazează pe lucrarea *Hartman-Stampacchia results for stably pseudomonotone operators and nonlinear hemivariational inequalities* publicată în *Applicable Analysis*. În acest capitol sunt studiate două tipuri de inegalități hemivariaționale. Mai întâi sunt prezentate

câteva rezultate de existență pentru o inegalitate hemivariațională de tip Hartman-Stampacchia în cadrul căreia apar operatori stabil pseudomonotoni. Pentru a doua inegalitate, numită de autori inegalitate hemivariațională neliniară, sunt stabilite două rezultate de existență fără a impune condiții de monotonie. Capitolul se încheie cu o secțiune în care sunt prezentate posibile aplicații ale rezultatelor obținute și se menționează conexiunea cu alte lucrări din literatura de specialitate.

**Capitolul 5** are la bază lucrarea *Nonlinear hemivariational inequalities and applications to nonsmooth Mechanics* publicată în *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*. În acest capitol se continuă studiul inegalităților hemivariaționale neliniare introduse în capitolul precedent. Noutatea inegalității studiate constă în apariția funcționalelor  $h$  și  $f$  care nu numai că depind de variabilă spațială  $x$  ci și de necunoscuta  $u$ , întâmpinându-se astfel o serie de dificultăți în determinarea existenței soluției deoarece metodele standard nu se mai pot aplica. Demonstrațiile teoremelor se bazează pe Principiul KKM al lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz combinat cu Alternativa lui Mosco. Din nou, ultima secțiune este dedicată prezentării unor exemple din mecanica neliniară pentru care rezultatele din acest capitol pot fi aplicate.

**Capitolul 6** are la bază lucrarea *Existence and uniqueness results for a class of quasi-hemivariational inequalities* publicată în *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. În acest ultim capitol al primei părți atenția se concentrează asupra unei inegalități quasi-hemivariaționale nestandard de tip eliptic. Este în primul rând o inegalitate foarte generală înglobând sub forma unor cazuri particulare diferite tipuri de inegalități precum cele hemivariaționale, quasi-hemivariaționale sau variaționale fie ele mixte sau standard. Noutatea constă în apariția termenului integral din membrul drept al inegalității care depinde de necunoscuta  $u$  și care împiedică aplicarea directă a metodelor clasice. Sunt stabilite trei rezultate principale după cum urmează:

- existența soluțiilor în cazul submulțimilor mărginite, închise și convexe;
- o condiție suficientă pentru existența soluțiilor în cazul submulțimilor nemărginite;
- unicitatea și stabilitatea soluției în cazul particular  $H \equiv 1$  impunând însa ipoteze suplimentare de monotonie.

**Capitolul 7** are la bază lucrarea *Weak solutions for nonlinear antiplane problems leading to hemivariational inequalities* publicată în *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. În acest capitol se analizează deformarea în contextul antiplan a unui cilindru elastic aflat în contact cu frecare cu un obstacol rigid numit fundație. Procesul este considerat static, iar pentru materiale elastice un model asemănător a fost studiat de către S. Migórski, A. Ochal și M. Sofonea în lucrarea

Weak solvability of antiplane frictional contact problems for elastic cylinders, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol 11, No. 1, Feb. 2010, Pag. 172-183,

în care existența soluției slabe este stabilită utilizând rezultate de incluziune în spațiile Banach.

În acest capitol atenția este îndreptată către relaxarea ipotezelor asupra funcționalei cu ajutorul căreia frecarea este modelată, și în același timp, este studiat cazul materialelor neliniare, numeroase exemple de legi constitutive și legi de frecare pentru care rezultatele din acest capitol sunt valide fiind furnizate în ultimile două secțiuni.

**Capitolul 8** are la bază lucrarea *Antiplane shear deformations of piezoelectric bodies in contact with a conductive support* trimisă spre publicare la *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. În acest capitol se continuă studiul problemelor antiplane început în capitolul anterior considerându-se de această dată contactul dintre un corp piezoelectric și o fundație încărcată electric. Piezoelectricitatea caracterizează acele materiale ce îmbină proprietățile mecanice cu cele electrice. Astfel, aplicarea de presiune asupra unui material piezoelectric (un cristal de cuarț de exemplu) conduce la apariția unei sarcini electrice în materialul respectiv, și invers, aplicarea unui câmp electric conduce la deformări ale corpului. Frecarea este modelată cu ajutorul gradientului generalizat Clarke, iar condiția electrică este modelată cu ajutorul subdiferențialei unei funcții proprii, convexe și inferior semicontinuă. Formularea slabă a problemei conduce la un sistem format dintr-o inegalitate hemivariațională și o egalitate variațională. Existența soluției slabe va fi o consecință a faptului că o inegalitate mult mai generală de tip variațional-hemivariațional admite soluții. Sub ipoteze suplimentare autorii stabilesc chiar unicitatea soluției.

**Capitolul 9** are la bază lucrarea *Contact models leading to variational-hemivariational inequalities* trimisă spre publicare la *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. Spre deosebire de celelalte capitole ale acestei părți, în acest capitol este studiat un model tridimensional cu ajutorul căruia putem rezolva o gamă largă de probleme, pentru materiale elastice, ce apar în mecanică. Noutatea acestui capitol constă în faptul că legea de material este una multivocă, fiind descrisă în termeni de subdiferențială a unei funcții convexe și inferior semicontinuă. În Secțiunea 5 sunt prezentate două exemple de funcții constitutive subdiferențiabile care îndeplinesc condițiile impuse și care conduc la legi constitutive binecunoscute în literatura de specialitate. Rezultatele principale constau în demonstrarea existenței soluției slabe pentru modelul considerat și prin impunerea de ipoteze suplimentare sunt stabilite unicitatea, stabilitatea și mărginirea soluției.

**Capitolul 10** are la bază lucrarea *Nonlinear, degenerate and singular eigenvalue problems on  $\mathbb{R}^N$*  publicată în *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. În acest capitol se stabilește existența unui spectru continuu într-o vecinătate la dreapta originii pentru o clasă de operatori de tip eliptic care sunt neliniari, neomogeni și posedă atât puncte singulare cât și degenerate. Problema propusă poate fi privită ca o perturbare neliniară a problemei

$$-\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) = \lambda g(x)u \text{ în } \mathbb{R}^N.$$

Rezultatul principal afirmă că există o constantă pozitivă  $\mu$  (în esență  $\mu$  este prima valoare proprie a problemei liniare neperturbate) astfel încât orice  $\lambda \in (0, c\mu)$  este valoare proprie pentru

problema studiată. Aici,  $c > 0$  este o constantă pozitivă ce arată cât de mult domină termenul principal. Cu alte cuvinte, lungimea intervalului în care găsim valorile proprii ale problemei perturbate depinde de măsura în care termenul principal domină perturbarea.

**Capitolul 11** are la baza lucrarea *On an eigenvalue problem involving variable exponent growth conditions* publicată în *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. În acest capitol se analizează efectul unei perturbări asupra spectrului operatorului lui Laplace. Mai precis, în contrast cu problema originală care admite un spectru discret și nemărginit, problema perturbată (problemă de această neliniară) admite un spectru continuu ce se concentrează la dreapta originii care este mărginit superior de  $\lambda_1$  (prima valoare proprie a operatorului lui Laplace). Mai mult, fiecărei valori proprii  $\lambda \in (0, \lambda_1)$  îi corespunde o unică soluție slabă.

**Capitolul 12** are la baza lucrarea *Continuous family of eigenvalues concentrating in a small neighborhood at the right of the origin for a class of discrete boundary value problems* publicată în *Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.* În acest capitol se stabilește existența unui spectru continuu pentru o clasă de operatori neliniari în cazul discret. Demonstrațiile se bazează pe teorema lui Banach de punct fix combinată cu o tehnică de minimizare.