REZULTATE DE EXISTENŢĂ ŞI MULTIPLICITATE ÎN PROBLEME ELIPTICE VARIAŢIONALE ŞI INEGALITĂŢI CVASIVARIAŢIONALE

CIULCU CLAUDIU

- rezumatul tezei de doctorat -

Conducător ştiinţific: Prof. Dr. CONSTANTIN P. NICULESCU

Cuvinte Cheie : inegalităţi variaţionale, inegalităţi cvasivariaţionale, inegalităţi hemivariaţionale, valori esenţiale, valori proprii, valori critice, duble valori proprii, probleme de contact, multiplicitate a soluţiei, formulări variaţionale, formularea duală, punct critic.

1. Asupra unei probleme de contact vîscoelastic cu frecare şi uzură

În acest capitol considerăm un model matematic pentru procesul de frecare bilaterală între un corp vîscoelastic şi o fundaţie rigidă. Ipoteza de lucru este aceea a teoriei micilor deplasări. Presupunem că avem un contact cu frecare în urma căruia rezultă uzura suprafeţei de contact, care este modelat printr-o versiune a legii lui Archard. Vom analiza aici ambele cazuri, cel dinamic şi cel cvasistatic, şi vom deduce formulări variaţionale pentru acest model. Apoi, vom demonstra rezultate de existenţă şi unicitate şi vom studia dependenţa continuă a soluţiei în raport cu parametrii legaţi de viteză şi de fundaţie.

Capitolul este organizat după cum urmează. Secţiunea 1 este o introducere în problematica acestui capitol şi vom prezenta aici câteva consideraţii generale asupra acestuia. În Secţiunea 2, vom introduce câteva notaţii şi rezultate preliminare utilizate în continuare. În Secţiunea 3, vom prezenta problema de contact cu frecare şi vom deriva formulări variaţionale, atât în cazul cvasistatic cât şi în cazul dinamic. Aceste formulări sunt următoarele

Problema $\mathcal{P}_1^V$. Găsiţi câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$, şi câmpul tensiunilor $\boldsymbol{\sigma} : [0,T] \to \mathcal{H}$ astfel încât

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{a.p.t. } t \in (0,T), \tag{I.1}$$

$$\begin{gathered}\langle \ddot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} \\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V,\ \text{a.p.t. } t \in (0,T),\end{gathered} \tag{I.2}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{în } \Omega. \tag{I.3}$$

Problema $\mathcal{P}_2^V$. Găsiţi câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$, şi câmpul tensiunilor

$\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \to \mathcal{H}$ astfel încât

$$\text{(I.4)} \qquad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T),$$

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{gathered} (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} \\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \text{a.p.t. } t \in (0, T), \end{gathered}$$

$$\text{(I.6)} \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{în } \Omega.$$

Apoi vom stabili principalele rezultate de existenţă şi unicitate, Teoremele 3.1 şi 3.2. Demonstraţia Teoremei 3.1 este dată în Secţiunea 4. Ea se bazează pe teoria ecuaţiilor de evoluţie cu operatori monotoni şi se obţine printr-un argument de punct fix, utilizând Teorema lui Banach. Demonstraţia Teoremei 3.2 este dată în Secţiunea 5 şi este o aplicaţie a Teoremei Chauchy-Lipschitz, considerată în spaţii Banach oarecare. În cele din urmă, în Secţiunea 6, vom studia dependenţa soluţiei, atunci când se fac perturbări ale condiţiilor de contact pe frontieră, pentru ambele cazuri: cel dinamic şi cel cvasistatic, Teoremele 6.1 şi 6.2 demonstrându-se utilizând argumente de tip Gronwall.

Rezultatele acestui capitol sunt bazate pe articolul [1], apărut în anul 2002, scris în colaborare cu Thierry-Vincent Hoarau-Mantel şi Mircea Sofonea.

2. O aplicaţie a inegalităţilor cvasivariaţionale în studiul unei probleme de contact cu frecare cu complianţă normală

Modelarea matematică a diferitelor clase de probleme fizice este legată de inegalităţile variaţionale eliptice în care mulţimea constrângerilor sau funcţionala nediferenţiabilă depind de soluţia problemei care este, bineînţeles, necunoscută. Inegalităţile variaţionale asociate problemelor de acest tip sunt numite *inegalităţi cvasivariaţionale*.

În acest capitol vom considera inegalităţi cvasivariaţionale de forma

$$\text{(II.1)} \qquad u \in V, \quad (Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V,$$

unde V este un spaţiu Hilbert real şi A este un operator tare monoton şi Lipschit continuu pe V. În primele trei secţiuni vom prezenta un rezultat abstract de existenţă şi unicitate obţinut de D. Motreanu şi M. Sofonea. Vom găsi condiţii suficiente asupra funcţionalei nediferenţiabile j pentru a avea existenţa, unicitatea şi dependenţa Lipschitz continuă a soluţiei în raport cu f. Anumite condiţii sunt formulate în funcţie de derivata direcţională a lui j. Demonstraţia rezultatului de existenţă pentru (II.1) se bazează pe un argument de punct fix şi teoria gradului topologic.

În ultima parte a capitolului vom investiga un model pentru procesul de contact cu frecare dintre un corp elastic, care se află sub acţiunea unor forţe volumice şi a unor forţe de tracţiune , şi o fundaţie. Scopul principal al capitolului este prezentarea unor rezultate de existenţă şi unicitate pentru inegalităţi cvasivariaţionale, ce modelează o problemă concretă de contact cu frecare, precum şi dependenţa continuă a soluţiei, rezultate pe care le-am obţinut în colaborare cu Motreanu şi Sofonea în articolul [3].

Capitolul este structurat după cum urmează. În Secţiunea 2 vom prezenta problema abstractă, ipotezele şi principalul rezultat de existenţă şi unicitate utilizat. În Secţiunea 3 vom demonstra acest rezultat utilizând argumente de punct fix şi grad topologic, Teorema lui Schauder de punct fix şi gradul toplogic Leroy-Schauder. În continuare, Secţiunea 4 este dedicată prezentării problemei mecanice şi discutării condiţiilor de contact cu frecare. În Secţiunea 5 vom prezenta notaţiile, vom descrie ipotezele problemei, derivăm formulări variaţionale ale problemei şi vom formula principalele rezultate, Teoremele 5.2–5.4. Formulările variaţionale sunt următoarele
Problema P_1. *Găsiţi câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathrm{I\!R}^d$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in V, \quad (F(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_{\mathcal{H}} + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \\ \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Problema P_2. *Găsiţi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}_{\boldsymbol{d}}$ *astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma} \in D(T) \cap \Sigma(T(\boldsymbol{\sigma})), \quad (F^{-1}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(T(\boldsymbol{\sigma})). \tag{II.3}$$

Demonstraţiile sunt stabilite în Secţiunea 6 şi sunt bazate pe rezultatul abstract prezentat la începutul capitolului. În sfârşit, în Secţiunea 7 vom studia dependenţa soluţiei slabe în raport cu coeficientul de frecare şi vom demonstra un rezultat de convergenţă. Rezultatele originale ale acestui capitol sunt cuprinse în articolul [3], apărut în anul 2001 şi scris în colaborare cu D. Motreanu şi M. Sofonea.

3. Multiplicitatea soluţiei pentru o clasă de probleme de valori proprii pentru inegalităţi hemivariaţionale

În acest capitol studiem multiplicitatea soluţiilor pentru o clasă de probleme de valori proprii sub forma unei inegalităţi hemivariaţionale nesimetrice. Mai precis arătăm că numărul de soluţii al problemei perturbate (**P**) devine din ce în ce mai mare când perturbarea tinde la zero. Acest rezultat a făcut obiectul unui studiu pe care l-am realizat în colaborare cu D. Motreanu şi V. Rădulescu în articolul [2], apărut în anul 2003.

Capitolul este structurat după cum urmează. În Secţiunea 2 vom prezenta principalele notaţii utilizate, problema perturbată şi vom enunţa rezultatul de existenţă şi multiplicitate a soluţiei din acest capitol, Teorema 2.1. Problema pe care o studiem este următoarea

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} (u,\lambda) \in V \times \mathbb{R} \\ a(u,v) + \displaystyle\int_\Omega (j^0(x,u(x);v(x)) + h^0(x,u(x);v(x)))\,dx + \langle \varphi, v\rangle_V \geq \lambda(u,v), \\ \forall\ v \in V \\ \|u\| = r. \end{cases}$$

Principalul rezultat este următoarea teoremă

Teorema 2.1. *Presupunem ipotezele* $(\mathbf{A}_1) - (\mathbf{A}_5)$ *satisfăcute. Atunci, pentru orice* $n \geq 1$, *există* $\delta_n > 0$ *astfel încât, dacă* $\|h(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta_n$, $\|a_2\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)} \leq \delta_n$, $c \leq \delta_n$ *şi* $\|\varphi\|_{V^*} \leq \delta_n$, *atunci problema* $(\mathbf{P})$ *admite cel puţin* n *soluţii distincte.*

Secţiunea 3 este dedicată prezentării unor rezultate auxiliare, utile în demonstrarea Teoremei 2.1. În continuare, în cadrul Secţiunii 4, vom prezenta câteva noţiuni de Topologie Algebrică şi două rezultate prin care suntem gata să demonstrăm în Secţiunea 5 teorema centrală de existenţă şi multiplicitate. Un element de originalitate îl constituie Propoziţia 4.2, unde am utilizat noţiuni de Topologie Algebrică.

4. Rezultate de multiplicitate a soluţiei pentru probleme relativ la două valori proprii

În acest capitol ne ocupăm cu studiul unui nou tip de probleme de valori proprii pentru inegalităţile hemivariaţionale, numite *probleme de duble valori proprii* care au fost introduse de D. Motreanu şi P.D. Panagiotopoulos. Găsim aici soluţii multiple pentru problema $(P^1_{r,a,b})$ şi studiem efectul indus de o perturbare facută în termenul neneted şi neconvex al inegalităţii hemivariaţionale considerate. Pentru a demonstra rezultatele utilizăm tehnici de tip Lusternik-Schnirelmann şi rezultate demonstrate de M. Degiovanni şi S. Lancelotti şi V.D. Rădulescu şi P.D. Panagiotopoulos. Rezultatele din acest capitol au făcut obiectul unui articol publicat în colaborare cu T.-V. Hoarau-Mantel [4].

Capitolul este structurat după cum urmează. În Secţiunea 1 sunt prezentate principalele notaţii, ipotezele de lucru şi cele două rezultate ce urmează a fi demonstrate. Studiem următoarea problemă de duble valori proprii : Găsiţi $u_1, u_2 \in V$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(P^1_{r,a,b}) \begin{cases} a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) + C((u_1, u_2), v_1, v_2) + \\ + \displaystyle\int_\Omega j^0_y(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x))dx \geq \\ \geq \lambda_1(B_1u_1, v_1)_V + \lambda_2(B_2u_2, v_2)_V, \ \forall\ v_1, v_2 \in V, \\ a(B_1u_1, u_1)_V + b(B_2u_2, u_2)_V = r^2. \end{cases}$$

Secţiunea 2 este dedicată demonstrării rezultatului de multiplicitate a soluţiei pentru problema $(P^1_{r,a,b})$, Teorema 1.1.

Teorema 1.1. *Presupunem că ipotezele* $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ *sunt îndeplinite. Atunci problema de duble valori proprii* $(\mathrm{P}^1_{r,a,b})$ *admite o infinitate de soluţii* $\{(gu^1_n, gu^2_n), (\lambda^1_n, \lambda^2_n)\} \subset S^{a,b}_r \times \mathbb{R}^2$ *cu* $\lambda^1_n = a \cdot \lambda_n$ *şi* $\lambda^2_n = b \cdot \lambda_n$*, unde*

$$\lambda_n = r^{-2} \left(a_1(u^1_n, u^1_n) + a_2(u^2_n, u^2_n) + \langle z^1_n, gu^1_n\rangle_V + \langle z^2_n, gu^2_n\rangle_V + \right. \\ \left. + \int_\Omega \langle w_n(x), g(u^1_n - u^2_n)(x)\rangle dx \right),$$

pentru anumiţi $z^i_n \in V^*$ *şi* $w_n \in L^{p/(p-1)}(\Omega; \mathbb{R}^N)$*, satisfăcând*

$$z^i_n \in \partial f_i(gu^i_n),\ \ i = 1, 2$$

şi

$$w_n(x) \in \partial_y j(x, g(u^1_n - u^2_n)(x)) \quad a.p.t.\ x \in \Omega,$$

pentru orice $n \geq 1$ *şi* $g \in G$*.*

Secţiunea 3 prezintă o serie de rezultate ajutătoare, care permit, în condiţiile date, să vedem problema $(P^2_{r,a,b})$ ca o perturbare nesimetrică a celei iniţiale. Problema perturbată este următoarea: Găsiţi $u_1, u_2 \in V$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(P^2_{r,a,b}) \begin{cases} a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) + C((u_1, u_2), v_1, v_2) + \\ + \displaystyle\int_\Omega \big(j^0_y(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x)) + \\ + h^0_y(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x))\big)\, dx + \langle \Phi, v_1\rangle_V + \langle \Phi, v_2\rangle_V \geq \\ \geq \lambda_1(B_1u_1, v_1)_V + \lambda_2(B_2u_2, v_2)_V, \ \forall\ v_1, v_2 \in V, \\ a(B_1u_1, u_1)_V + b(B_2u_2, u_2)_V = r^2, \end{cases}$$

Astfel o putem trata bazându-ne şi pe rezultatele obţinute în Secţiunea 2. În ultima secţiune a acestui capitol vom demonstra cel de-al doilea rezultat de multiplicitate, Teorema 1.2, combinând rezultatele obţinute anterior.

Teorema 1.2. *Presupunem că ipotezele* $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_6)$ *sunt îndeplinite. Atunci, pentru orice* $n \geq 1$*, există* $\delta_n > 0$ *astfel încât problema* $(P^2_{r,a,b})$ *admite cel puţin* n *soluţii distincte, dacă* $\|h(\cdot, 0)\|_{L^1} \leq \delta_n$*,* $\|\theta_1\|_{L^{p'}} \leq \delta_n$*,* $c \leq \delta_n$ *şi* $\|\Phi\|_{V^*} \leq \delta_n$*.*

Rezultatele acestui capitol constituie generalizări ale unor rezultate demonstrate anterior, pentru cazul problemelor de duble valori proprii.

5. Rezultate de multiplicitate a soluţiei pentru o problemă rezonantă cu p-Laplacean

În acest capitol ne vom ocupa cu studiul unei probleme la limită rezonante cu p-Laplacean. Vom obţine un rezultat de multiplicitate a soluţiei, mai exact existenţa a două soluţii netriviale. Punctul de plecare în realizarea acestui studiu l-a reprezentat un articol în care au fost obţinute rezultate similare pentru o problemă semiliniară cu Laplacean. Dificultatea în cazul nostru a reprezentat-o neliniaritatea operatorului p-Laplacean, ceea ce a impus o întărire a ipotezelor asupra termenului Nemîtski. Metodele utilizate în obţinerea rezultatului sunt variaţionale, obţinându-se existenţa soluţiilor slabe ale problemei studiate. Funcţionala energetică asociată problemei nu este coercivă, prin urmare existenţa soluţiilor nu se poate face urmând calea clasică.

Capitolul este structurat după cum urmează. În Secţiunea 1 este prezentat cadrul problemei ce urmează a fi studiată, precum şi principalele rezultate, Teoremele 1.1 şi 1.2. Studiem existenţa a două soluţii netriviale pentru problema eliptică neliniară

$$\text{(V.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_{1p}|u|^{p-2}u + g(x,u) & \text{în } \Omega \\ \quad u = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $(1 < p < \infty)$, iar λ_{1p} este prima valoare proprie a operatorului p-Laplacean. Principalele rezultate sunt următoarele teoreme

Teorema 1.1. *Presupunem îndeplinite condiţiile* $(V1.3)$-$(V1.6)$ *şi că*

$$\text{(V.2)} \qquad \begin{gathered} \textit{pentru orice } \{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \textit{ cu } \|u_n\| \to \infty \textit{ avem} \\ \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} G(x, u_n(x))dx \le 0. \end{gathered}$$

Atunci problema $(V.1)$ *are o solutie netrivială* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2. *Presupunem îndeplinite condiţiile Teoremei 1.1 şi în plus*

$$\text{(V.3)} \qquad G(x,s) \le \frac{\lambda_W - \lambda_{1p}}{p} s^p \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \textit{a.p.t. } x \in \Omega$$

Atunci problema $(V.1)$ *are încă o soluţie netrivială.*

Secţiunea 2 este dedicată detalierii principalelor consecinţe ce decurg din ipotezele considerate, justificându-se astfel alegerea facută asupra metodei de lucru utilizate.

În continuare se demonstrează în Secţiunea 3 cele două teoreme enunţate anterior. În ultima secţiune prezentăm câteva rezultate auxiliare ce au fost utilizate în demonstraţiile Teoremelor 1.1 şi 1.2. Rezultatele acestui capitol fac obiectul unui studiu pe care îl efectuez în prezent, aflat în faza de finalizare.

References

[1] C. Ciulcu, T.-V. Hoarau Mantel and M. Sofonea, Viscoelastic sliding contact problems with wear, *Math. Comput. Modelling* **36**(7-8) (2002), 861-874.

[2] C. Ciulcu, D. Motreanu and V. Rădulescu, Multiplicity of solutions for a class of non-symmetric eigenvalue hemivariational inequalities, *Math. Methods Appl. Sci.* **26**(9) (2003), 801-814.

[3] C. Ciulcu, D. Motreanu and M. Sofonea, Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Math. Ineq. Appl.* **4**, No. 3, (2001), 465-479.

[4] T.-V. Hoarau-Mantel and C. Ciulcu, Multiplicity results for a class of double eigenvalue hemivariational inequalities on a sphere-like type manifold, *Analele Universităţii din Craiova,* **28** (2001), 93-109.