Universitatea din Craiova,
Facultatea de Matematică-Informatică

Simona Maria DĂBULEANU

Metode de analiză neliniară în studiul unor probleme de evoluţie

Teză de doctorat
-rezumat-

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vicenţiu RĂDULESCU

Craiova - ianuarie 2005

1. Introducere

I. **Originea fizică a problemei.** În această lucrare ne propunem să studiem ecuaţiile de tip Hamilton-Jacobi cu viscozitate care au urmatoarea formă:

$$(VHJ) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{în} \quad (0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0) = \mu_0 & \text{în} \quad \Omega. \end{cases}$$

cu condiţie la limită de tip Dirichlet omogenă:

$$(D) \qquad u = 0 \;\; \text{pe} \;\; (0,+\infty)\times\partial\Omega,$$

sau Neumann omogenă:

$$(N) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\; \text{pe} \;\; (0,+\infty)\times\partial\Omega.$$

Domeniul Ω este un deschis mărginit din $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă. Pentru $x \in \partial\Omega$, notăm cu $\nu(x)$ versorul normalei exterioare la frontiera $\partial\Omega$ în punctul x. Parametri a, p verifică $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$, iar condiţia iniţială μ_0 este o măsură Radon mărginită pe Ω, sau o funcţie măsurabilă în spaţiul Lebesgue $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, sau o funcţie continuă pe $\overline{\Omega}$.

Ecuaţiile de tip (VHJ) prezintă un mare interes atât matematic cât şi fizic. Pe de o parte, aceste ecuaţii reprezintă cel mai simplu model de problemă parabolică neliniară în care neliniaritatea depinde numai de derivata de ordinul întâi a soluţiei. Pe de altă parte aceste ecuaţii intervin în teoria controlului stocastic şi determinist cât şi în teoria marilor deviaţii probabiliste (a se vedea [3, 13, 14, 16]). Mai exact, dacă notăm cu $P_\varepsilon(t,x)$ probabilitatea ca un proces de difuzie care pleacă din x la momentul t cu un coeficient de difuzie $\varepsilon > 0$, să rămână în domeniul mărginit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ până la momentul $T > 0$, atunci $P_\varepsilon(t,x)$ satisface o anumită ecuaţie parabolică liniară în $[0,T]\times\Omega$ cu condiţia la limită:

$$P_\varepsilon(t,x) = 0, \;\; \text{pentru} \;\; (t,x) \in [0,T]\times\partial\Omega \;\; \text{şi} \;\; P_\varepsilon(T,x) = 1 \;\; \text{pentru} \;\; x \in \Omega.$$

Teoria marilor deviaţii probabiliste se ocupă cu studiul comportamentului funcţiei P_ε în vecinătatea originii 0 când ε tinde la 0. O soluţie la acestă problemă este să definim:

$$u_\varepsilon = -\varepsilon \log P_\varepsilon.$$

Dacă spre exemplu procesul de difuzie este mişcarea Browniană de intensitate $(2\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, atunci u_ε verifică următoarea ecuaţie:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{în} \quad (0,+\infty)\times\Omega, \\ u_\varepsilon = +\infty & \text{pe} \quad (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u_\varepsilon(T) = 0 & \text{în} \quad \Omega, \end{cases}$$

Acest model corespunde ecuaţiilor (VHJ) cu condicţie la limită de tip Dirichlet omogenă. Condiţia la limită de tip Neumann este specifică proceselor de difuzie cu traiectorie reflectata la frontieră.

Aceste ecuaţii mai intervin în teoria fizică a creşterilor suprafeţelor, creşteri generate de o serie de mecanisme cum ar fi de exemplu depunerea balistică. O imagine simplă a acestui mecanism este aceea a unor particule care se mişcă in direcţia unei suprafeţe si care se ataşează unele de altele in mod aleatoriu. Acest punct de vedere este propriu procesului de evaporare sau depunere a filmelor subţiri de aluminiu sau de metale rare. Un punct de plecare în descrierea acestui mecanism este ecuaţia următoare:

$$(KPZ_1) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma \Delta h + \lambda |\nabla h|^2 + \eta.$$

Acest model descrie creşterea suprafeţei faţă de un plan de referinţă care, la rândul lui, se poate deplasa cu viteză constantă. În ecuaţia de mai sus h reprezintă înălţimea suprafeţei în raport cu planul, iar t reprezintă timpul. Primul termen din partea dreapta a ecuaţei este termenul de difuzie, iar γ poate fi interpretat ca fiind tensiunea de suprafaţă. Al doilea termen este generat de procesul de creştere, unde constanta λ este o măsură a ratei de depunere. În final, ultimul termen este produs de o forţă stocastică de scurtă memorie şi medie nulă. În forma lui cea mai simplă η reprezintă zgomotul alb. Modelul de mai sus a fost propus pentru prima oară de către Kardar, Parisi şi Zhang [19], şi este cunoscut sub numele de ecuaţia (KPZ). Luând în considerare şi alte efecte de creştere a suprafeţei J.Krug-H.Spohn, [20] au extins modelul (KPZ_1) la:

$$(KPZ_2) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma \Delta h + \lambda |\nabla h|^p + \eta.$$

Pentru $p > 0$ luând orice valoare pozitivă, (KPZ_2) reprezintă ecuaţia KPZ generalizată. In particular, fără termenul η este cunoscută sub numele de ecuaţia KPZ deterministă.

II. **O scurtă prezentare bibliografică.** În acest paragraf ne propunem sa rezumăm principalele contribuţii aduse în studiul ecuaţiilor de tip (VHJ) sau a altor probleme asemanatoare.

În spaţiul $\mathbb{R}^N$, problema Cauchy a fost intens studiată. L.Amour-M.Ben-Artzi [2] şi M. Ben-Artzi [4] au demostrat existenţa globală a soluţiilor clasice ale problemei Cauchy (VHJ) pentru $p \geq 1$ şi condiţie iniţială $\mu_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$, mărginită împreună cu derivatele de ordinul unu şi doi. Apoi, B.Gilding-M.Guedda-R.Kersner [18] au extins aceste rezultate la $\mu_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ şi $p > 0$. Pentru condiţie iniţială μ_0 mai puţin netedă, mai exact, dacă $\mu_0 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$ sau o măsură Radon mărginită, M.Ben-Artzi-Ph. Souplet-F.B.Weissler în [6] şi S.Benachour-Ph.Laurençot în [10] au stabilit câteva rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiilor slabe pentru problema (VHJ), în funcţie de paramentrul $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ şi exponentul $p \geq 1$. În afara de existenţa şi unicitatea soluţiilor pntru problema Cauchy, S. Benachour-Ph. Laurençot-D. Schmitt în [8], S. Benachour-Ph. Laurençot-D. Schmitt-Ph. Souplet în [9], B. Gilding-M. Guedda-R. Kersner în [18], M.Ben-Artzi-H.Koch în [5] şi Ph.Laurençot-Ph.Souplet în [21] sau preocupat şi de comportamentul asimptotic al soluţiilor.

Pe domenii mărginite $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, problema (VHJ) cu condiţie la limită de tip Dirichlet omogenă (D) sau Neumann omogenă (N) a fost destul de puţin analizată. Putem menţiona aici lucrarea lui N. Alaa [1], care a demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiilor "mild" pentru condiţie iniţială o măsură Radon mărginită şi $p \in [1, \frac{N+2}{N+1})$. O altă contribuţie importantă este studiul lui M.G.Crandall-P.L.Lions-P.E.Souganidis [11]. Folosind teoria semigrupurilor care păstrează monotonia, autorii au demonstrat existenţa unei margini universale pentru soluţiile pozitive ale problemei Cauchy-Dirichlet pentru $p > 1$, $a < 0$ şi μ_0 o funcţie continuă şi pozitivă care se anulează la frontieră (Teorema 2.1, p.172 în [11]). În final, cităm articolul lui [24], care a demonstrat explozia în timp finit a soluţiilor pentru $a > 0$, $p > 2$ şi condiţie iniţială "suficient de mare".

2. Rezultatele principale

Lucrarea de faţă îşi propune să continue studiul problemelor Cauchy-Dirichlet $[(VHJ) + (D)]$ şi Cauchy-Neumann $[(VHJ) + (N)]$, încercând să clarifice anumite întrebări precum existenţa soluţiilor slabe, unicitatea, regularitatea şi comportamentul asimptotic al soluţiilor când t tinde la $+\infty$. Un interes particular a fost acordat problemei (VHJ) cu condiţie iniţială mai puťin netedă. În cele ce urmează $\mathcal{M}_b(\Omega)$ reprezintă spaţiul măsurilor Radon mărginite. Notăm cu $(e^{t\Delta})_{t\leq 0}$ şi $(S(t))_{t\geq 0}$ semigrupul de contracţie în $L^q(\Omega), q \geq 1$ asociat ecuaţiei căldurii cu condiţie la limită de tip Dirichlet omogenă sau Neumann omogenă (a se vedea [23]). După cum se poate vedea în [7] şi [12] acest semigrup poate fi extins, în mod natural, la spaţiul măsurilor Radon mărginite.

I. **Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia Hamilton-Jacobi cu viscozitate.** Să introducem mai întâi doua noţiuni de soluţii slabe pentru problema $[(VHJ) + (D)]$ când $p \in (0, \infty)$ şi $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Definiţie I.1. *Fie $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. O soluţie slabă a problemei $[(VHJ) + (D)]$ este o funcţie $u \in C((0, \infty); L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$ astfel încât $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$ pentru orice $T > 0$ şi care verifică:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \quad \text{în} \quad \mathcal{D}'(Q_T), \\ u(t) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0 \quad \text{slab în} \quad \mathcal{M}_b(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

Definiţie I.2. *Fie $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. O soluţie "mild" a problemei $[(VHJ) + (D)]$ este o funcţie $u \in C((0, \infty); L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$ astfel încât $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$ pentru orice $T > 0$ şi care verifică:*

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a\int_0^t e^{(t-s)\Delta}|\nabla u|^p(s)\, ds. \tag{2.2}$$

Cele doua definiţii de mai sus sunt echivalente, astfel orice soluţie "mild" va fi numită soluţie slabă. Putem acum enunţa rezultatele principale ale primului capitol.

În prima teoremă considerăm cazul $0 < p < 1$. Din câte cunoaştem acest caz nu a mai fost analizat înainte pe domenii mărginite.

Teoremă I.1. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ şi $0 < p < 1$. Atunci problema $[(VHJ) + (D)]$ admite cel puţin o soluţie slabă. În plus, această soluţie este unică în următoarele cazuri:*

a) Dacă $0 < p < \frac{2}{N+1}$ şi $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$,
b) Dacă $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ şi $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ cu $q > \frac{pN}{2-p}$.

Demonstaţia este structurată în patru etape. Mai întâi folosind teorema de punct fix a lui Schauder arătăm existenţa unei soluţii locale, apoi dăm un rezultat de regularitate, care ne permite să extindem apoi soluţia locală la o soluţie globală în timp, iar în ultima parte demonstrăm unicitatea soluţiei în cele doua cazuri de mai sus.

Următorul caz, $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$, a fost intens studiat pe întreg spaţiul $\mathbb{R}^N$ (a se vedea [2, 6, 10, 18]) precum şi pe domenii mărginite cu condiţie la limită de tip Dirichlet omogenă ([1, 11]).

Teoremă I.2. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ şi $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. Atunci problema $[(VHJ)+(D)]$ admite o unică soluţie slabă.*

Demonstraţia urmează aceleaşi etape ca în teorema precedentă. Din faptul că $\xi \to |\xi|^p$ este o funcţie local lipschitziană pentru $p \geq 1$, obţinem unicitatea soluţei. Apoi existenţa soluţiilor locale este o consecinţă a teoremei de punct fix a lui Banach.

Continuăm studiul în cazul sub-quadratic şi dăm câteva condiţii suficiente pentru condiţia iniţială care să asigure existenţa soluţiiloor slabe pentru problema $[(VHJ)+(D)]$. Notăm cu:

$$q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$$

un exponent critic (care apare deasemenea şi în ([6], p. 343), ([10], p. 2013) şi ([11], p. 189) şi observăm că:

$$q_c \geq 1 \Longleftrightarrow p \geq \frac{N+2}{N+1}.$$

Avem următorul rezultat:

Teoremă I.3. *Fie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ şi $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$. Dacă $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, unde $q > q_c$, atunci problema $[(VHJ)+(D)]$ admite o soluţie slabă $u \in C([0,T]; L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,pq}(\Omega))$, $\forall\, T > 0$. În plus această soluţie este unică în spaţiul de mai sus.*

În cazul $a < 0$ pentru a obţine existenţa globală a soluţiilor avem nevoie de ipoteze mai puţin restrictive.

Teoremă I.4. *Fie $a < 0$, $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ şi $\mu_0 \in L^1(\Omega)$ astefl încât $\mu_0 \geq 0$. Atunci există cel puţin o funcţie $u \in C([0,+\infty); L^1(\Omega))$ solu c tie slabă a problemei $[(VHJ)+(D)]$.*

Următoarea teoremă este un rezultat de inexistenţă a soluţiilor pentru $p \geq \frac{N+2}{N+1}$ şi condiţie iniţială în $\mathcal{M}_b(\Omega)$. Semnalăm că în [10] găsim un rezultat analog pebtru problema Cauchy în tot spaţiul $\mathbb{R}^N$.

Teoremă I.5. *Fie $a < 0$, $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $T > 0$, $x_0 \in \Omega$ şi $M > 0$ o constantă pozitivă. Atunci, pentru $\mu_0 = M\delta_{x_0}$ problema $[(VHJ)+(D)]$ nu admite nici o soluţie slabă.*

În cele din urmă analizăm cazul super-quadratic $p \geq 2$. Din Teorema 7.10 în [17] ştim că, dacă $\mu_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ atunci problema $[(VHJ)+(D)]$ admite o unică soluţie clasică maximală $u \in C^{0,1}([0,T^*) \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(Q_{T^*})$ unde $T^* \in (0,+\infty]$ este timpul maxim de existenţă al soluţiei u. În plus dacă $T^* < \infty$, atunci:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \sup_{x \in \Omega} (|u(t,x)| + |\nabla u(t,x)|) = \infty. \tag{2.3}$$

Drept consecinţă a ultimei observaţii, soluţia u rămâne uniform mărginită, dar, cu toate astea nu poate fi globală deoarece:

$$\lim_{t\nearrow T^*}\sup_{x\in\Omega}|\nabla u(t,x)| = +\infty.$$

În acest caz spunem că are loc "explozia în timp finit a gradientului".
Pentru $a > 0,\ p > 2$ şi $\mu_0 \in C_0^1(\Omega)$, în [24], P. Souplet a demonstrat că "explozia în timp finit a gradientului" are loc pentru condiţii iniţiale μ_0 suficient de mari. Să remarcăm că acest fenomen nu are loc pentru problema Cauchy în $\mathbb{R}^N$.

În cele ce urmează arătăm că în cazul problemei Hamilton-Jacobi cu absorţie avem existenţa globală a soluţiei.

Teoremă I.6. *Fie $p \geq 2$ şi $a < 0$. Dacă condiţia iniţială verifică $\mu_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ cu $\mu_0 \geq 0$, atunci soluţia maximală u a problemei $[(VHJ)+(D)]$ este o soluţie globală.*

Ultimul rezultat este o generalizare a Teoremei I.6 la condiţii iniţiale mai puţin netede. Ca în [6] introducem spaţiul:

$$L^1_{+,approx} = \{\mu_0 \in L^1_+(\Omega) |\ \ \exists (u_0^n)_n,\ u_0^n \in C_0^1(\overline{\Omega});\ 0 \leq u_0^n \nearrow \mu_0\}.$$

Teoremă I.7. *Fie $p \geq 2$ şi $a < 0$. Pentru orice $\mu_0 \in L^1_{+,approx}$ problema $[(VHJ)+(D)]$ admite cel puţin o soluţie slabă globală u astfel încât , pentru orice $T > 0$:*

$$\begin{cases} u \in C([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \quad \text{în} \quad D'(Q_T), \\ u(0) = \mu_0 \quad\quad \text{în} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

II. **Problema Cauchy-Neumann pentru ecuaţia Hamilton-Jacobi cu viscozitate.** În acest capitol încercăm să răspundem la aceleasi tip de întrebări ca în capitolul precedent, dar pentru problema $[(VHJ)+(N)]$. Astfel obţinem existenţa, unicitatea şi regularitatea soluţiilor în funcţie de condiţia iniţială μ_0, exponentul p şi semnul parametrului a.

Rezumăm pe scurt rezultatele Capitolului II:

- (i) Pentru $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, şi μ_0 o măsură Radon mărginită, folosind teoreme de punct fix, arătăm că problema $[(VHJ)+(N)]$ admite cel puţin o soluţie slabă, în plus dacă $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$ atunci această soluţie este unică. Pe de altă parte dacă $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ obţinem existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru condiţia iniţială μ_0 în spaţiul Lebesgue $L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.
- (ii) Pentru $a < 0$ şi $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ arătăm că problema $[(VHJ)+(N)]$ admite cel puţin o soluţie slabă pentru $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.
- (iii) În cele din urmă, în cazul $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p \geq \frac{N+2}{N+1}$ şi $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (masa Dirac în $x_0 \in \Omega$), arătăm că $[(VHJ)+(N)]$ nu admite soluţii slabe.

III. **Comportamentul asimptotic pentru problema Cauchy-Dirichlet.** Noţiunea de soluţie slabă este cea introdusă în Capitolul I. În funcţie de parametrul a şi de exponentul p distingem urmatoarele cazuri:

Teoremă III.1. *Fie $a < 0$, $p \in (0,1)$ şi $\mu_0 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ o măsură Radon mărginită. Atunci, pentru orice soluţie slabă u a problemei $[(VHJ) + (D)]$ există $T^* > 0$ astfel încât:*

$$u(t,x) = 0 \quad \textit{pentru orice} \quad (t,x) \in (T^*, +\infty) \times \Omega. \tag{2.1}$$

Această proprietate este numită "extincţia în timp finit a soluţiei problemei $[(VHJ) + (D)]$".

În demonstraţia acestei teoreme sunt folosite rezultatele obtinute în [8, 9, 18] asupra comportamentului asimptotic al soluţiei problemei Cauchy în $\mathbb{R}^N$. Într-adevăr, pentru $a < 0$, dacă prelungim cu 0 în afara domeniului Ω condiţia iniţială μ_0, atunci soluţia problemei Cauchy este o super-soluţie pentru problema Cauchy-Dirichlet. Cum soluţia problemei Cauchy se anulează în timp finit deducem extincţia în timp finit a solu ctiei problemei $[(VHJ) + (D)]$.

Urmatoarea teoremă descrie comportamentul asimptotic al soluţiilor problemei $[(VHJ) + (D)]$ pentru $a < 0$ şi $p \geq 1$.

Teoremă III.2. *Fie $a < 0$, $p \geq 1$ şi $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$. Atunci orice soluţie slabă u a problemei $[(VHJ) + (D)]$ converge uniform la 0 când $t \to \infty$.*

Acest rezultat este o consecinţă a faptului că soluţia ecuaţiei căldurii $e^{t\Delta}\mu_0$ cu condiţiei iniţială μ_0, este o super-soluţie a problemei $[(VHJ) + (D)]$. În plus, rezultate clasice ale ecuaţiei căldurii cu condiţie la limită de tip Dirichlet omogenă (a se vedea Lema 3, p. 25 în [23]) afirmă că:

$$\|e^{t\Delta}\mu_0\|_\infty \leq C(1 + t^{-\frac{N}{2}})e^{-\lambda t}\|\mu_0\|_1, \quad \text{pentru orice} \quad t \in (0, +\infty),$$

unde λ este prima valoare proprie a laplacianului în Ω. Astfel deducem că soluţia slabă u a problemei $[(VHJ) + (D)]$ verifică:

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1 + t^{-\frac{N}{2}})e^{-\lambda t}\|\mu_0\|_1, \quad \text{pentru orice} \quad t \in (0, +\infty). \tag{2.2}$$

ceea ce dă rata de descreştere a soluţiei u. În particular, u converge uniform la 0 când $t \to \infty$.

Continuăm studiul asupra comportamentului asimptotic în cazul $a > 0$, $p \in [1, 2)$.

Teoremă III.3. *Fie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p \in (1, 2)$ şi $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$. Atunci soluţia globală u a problemei $[(VHJ) + (D)]$ converge la 0, uniform în $\overline{\Omega}$, când $t \to \infty$.*

Demonstraţia acestei teoreme foloseste pe de o parte Principiul de Invarianţă a lui LaSalle, iar pe de altă parte existenţa unei funcţii Liapunov stricte ceea ce face ca traiectoriile să conveargă către soluţiile staţionare ale problemei $[(VHJ) + (D)]$. În plus acest rezultat poate fi generalizat pentru condiţii iniţiale mai puţin netede ca în Teoremele I.2 şi I.3.

IV. **Comportamentul asimptotic al soluţiilor problemei Cauchy-Neumann.** În ultimul capitol revenim la problema $[(VHJ) + (N)]$ pentru Ω un deschis mărginit şi convex şi obţinem un rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru condiţie iniţială continuă în $\overline{\Omega}$. Apoi studiem comportamentul asimptotic al soluţiilor în funcţie de exponentul p. Aceste rezultate se bazează pe nişte estimări remarcabile ale gradientului soluţiei problemei $[(VHJ)+(N)]$, obţinute cu ajutorul tehnicii Bernstein.

În final considerăm problema la limită urmatoare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \text{ în } \Omega \times (0,+\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad (0,+\infty) \times \partial\Omega; \\ u(0) = +\infty \quad \text{în } D; \\ u(0) = 0 \text{ în } \Omega \setminus \overline{D}; \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $p \in (1,+\infty)$, Ω şi D sunt doi deschişi mărginiţi astfel încât $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ şi Ω este convex. Această problemă provine din teoria marilor deviaţii probabiliste a proceselor de difuzie.

Înainte de a enunţa rezultatele principale avem nevoie să introducem urmatoarea notaţie. Fie u o funcţie în $C(\overline{Q_\infty})$. Pentru orice $t \geq 0$ notăm cu:

$$M(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(t,x) \tag{2.2}$$

şi

$$m(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} u(t,x), \tag{2.3}$$

Teoremă IV.1. *Considerăm $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$ şi $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$, unde Ω este un deschis mărginit şi convex. Atunci, problema $[(VHJ) + (N)]$ admite o soluţie unică:*

$$u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$$

pentru orice $T > 0$ şi $\tau \in (0,T)$. În plus:

$$t \to M(t) \textit{ este o funcţie descrescătoare pe } \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$t \to m(t) \quad \textit{este o funcţie crescătoare pe } \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} (M(s) - m(s))(t-s)^{-\frac{1}{2}} \textit{ pentru orice } t > s \geq 0, \tag{2.6}$$

iar pentru $p \neq 1$

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \leq \left(\frac{\max\{p,2\}}{ap|1-p|}\right)^{1/p} (M(s) - m(s))^{1/p}(t-s)^{-1/p} \textit{ pentru orice } t > s \geq 0. \tag{2.7}$$

Pentru demonstraţie folosim technica Bernstein. Această metodă poate fi găsită în [10, 11, 18] şi [22], unde sunt obţinute inegalităţii similare cu (2.6) şi (2.7) pentru problema Cauchy în $\mathbb{R}^N$.

În urmatoarea parte ne propunem să continuăm analiza proprietăţiilor calitative ale soluţiilor problemei $[(VHJ)+(N)]$ pentru $a < 0$, $p > 1$ şi condiţie iniţială μ_0 o funcţie continuă şi pozitivă. Astfel, demostrăm existenţa unei margini universale pentru gradientul soluţiei, estimaţie care va fi folosită pentru demonstrarea Teoremei IV.4.

Teoremă IV.2. *Fie Ω un deschis mărginit şi convex, $a < 0$ şi $p > 1$. Fie $\mu_0 \in C^+(\overline{\Omega})$ şi u unica soluţie a problemei $[(VHJ)+(N)]$ dată de Teorema IV.1. Atunci u satisface urmatoarea estimaţie:*

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \leq C(p,\Omega)\|u_0\|_1^{(p-1)/p} t^{-(p(N+1)-N)/2p}, \tag{2.8}$$

şi

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \leq |a|^{-1/p}\frac{(p-1)^{(p-1)/p}}{p} t^{-1/p}. \tag{2.9}$$

Urmatorul rezultat descrie comportamentul asimptotic al soluţiilor problemei $[(VHJ) + (N)]$ în funcţie de exponentul p.

Teoremă IV.3. *Fie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$ şi Ω un domeniu mărginit şi convex. Fie $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ şi u soluţia problemei $[(VHJ) + (N)]$ corespunzatoare condiţiei iniţiale μ_0.*

i) Dacă $p \in (0, 1)$, atunci are loc extinctia în timp finit a gradientului soluţiei u, cu alte cuvinte, există $T^* \in [0, +\infty)$ şi $c \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$u(t, x) \equiv c \text{ pentru orice } t \geq T^* \text{ şi } x \in \overline{\Omega},$$

ii) Dacă $p \in [1, +\infty)$, atunci $u(t, \cdot)$ converge uniform în $\overline{\Omega}$ către o constantă, atunci când $t \to \infty$.

Demonstraţia Teoremei IV.3 urmează aceleasi idei ca în [9]. În lucrarea citată mai sus, autorii au analizat comportamentul asimptotic al soluţiilor pentru problema Cauchy în $\mathbb{R}^N$ şi pentru condiţie iniţială o funcţie periodică. Argumentul cheie al demonstraţiei sunt cele doua inegalităţi (2.6) şi (2.7) din Teorema IV.3, în plus aceste rezultate pot fi extinse pentru condiţii iniţiale mai puţin netede, ca în Capitolul II.

Ultima parte este consacrată studiului problemei (2.1) a carei origine provine din teoria marilor deviaţii probabiliste. Amintim că aceiaşi problemă cu condiţie la limită de tip Dirichlet a fost deja analizată în [11] pentru $p > 1$ şi $a < 0$. Introducem mai întâi urmatoarea definiţie:

Definiţie IV.1. *O soluţie slabă a problemei (2.1) este o funcţie pozitivă $u \in C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}})$ care satisface pentru orice $0 < \tau < T < \infty$:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \text{ în } \; Q_{\tau,T}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe } \Gamma_{\tau,T}, \end{cases} \tag{2.10}$$

şi condiţie iniţială:

$$\lim_{t \searrow 0} u(t, \cdot) = 0 \text{ uniform pe orice compact din } \; \overline{\Omega} \setminus \overline{D} \tag{2.11}$$

$$\lim_{t \searrow 0} u(t, \cdot) = +\infty \text{ uniform pe orice compact din } \; D. \tag{2.12}$$

Teoremă IV.4. *Fie $p \in (1, 2)$ şi Ω, D doi deschişi din $\mathbb{R}^N$ cu frontiera netedă astfel încât Ω este convex şi $\overline{D} \subset \Omega$. Atunci problema (2.1) admite o unică soluţie în sensul Definiţiei IV.1.*

Demonstraţia existenţei foloseşte proprietăţile semigrupului care păstrează monotonia, proprietăţi care sunt prezentate pe larg în [11]. Convexitatea lui Ω joacă un rol esenţial, deoarece pentru demonstraţie avem nevoie de estimările asupra gradientului obţinute în Teorema IV.2.

Bibliografie

[1] N. Alaa. Solutions faibles d'équations paraboliques quasilinéaires avec données initiales mesure. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 3:1–15, 1996.

[2] L. Amour and M. Ben-Artzi. Global existence and decay for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *Nonlinear Anal*, 31:621–628, 1998.

[3] G. Barles. *Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 *Mathématiques et Applications*. Springer, 1994.

[4] M. Ben-Artzi. Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation. *Nonlinear Anal.*, 19:763–768, 1992.

[5] M. Ben-Artzi and H. Koch. Decay of mass for semilinear parabolic equation . *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6):869–881, 1999.

[6] M. Ben-Artzi, Ph. Souplet, and F.B.Weissler. The local theory for viscous Hamilton-Jacobi equations in Lebesgue spaces . *J. Math. Pures. Appl.*, 81:343–378, 2002.

[7] S. Benachour and S. Dabuleanu. The mixed Cauchy-Dirichlet problem for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *Advances Diff. Equations*, 8(12):1409-1452, 2003.

[8] S. Benachour, Ph. Laurençot, and D. Schmitt. Extinction and decay estimates for viscous Hamilton-Jacobi equations in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(4):1103–1111, 2002.

[9] S. Benachour, Ph. Laurençot, D. Schmitt, and Ph. Souplet. Extinction and non-extinction for viscous Hamilton-Jacobi equation in $\mathbf{R^N}$. *Asymptot. Anal.*, 31(3-4):229–246, 2002.

[10] S. Benachour and Ph. Laurencot. Global solutions to viscous Hamilton-Jacobi equations with irregular initial data . *Comm. Partial Differential Equations*, 24:1999–2021, 1999.

[11] M.G. Crandall, P.-L.Lions, and P.E. Souganidis. Maximal solutions and universal bounds for some partial differential equations of evolution . *Arch.Rational Mech.Anal.*, 105(2):163–190, 1989.

[12] S. Dabuleanu. The Cauchy-Neumann problem for a viscous Hamilton-Jacobi equation . ˆ *in curs de publicare la J.Evol.Equations*, 2003.

[13] L.C. Evans and H. Ishii. A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities . *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non Linéaire*, 2:1–20, 1985.

[14] L.C. Evans and P.E. Souganidis. A PDE approach to geometric optics for certain reaction diffusion equations . *Ind.U.Math.J.*, 38:773–797, 1989.

[15] W.H. Fleming and R.W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control.* Springer, Berlin, 1975.

[16] W.H. Fleming and P.E. Souganidis. A PDE viscosity solution approach to some problems of large deviation. *Ann.Scuola Norm. Sup.*, 13:171–192, 1986.

[17] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type* . Prentice-Hall, Inc., 1964.

[18] B. Gilding, M. Guedda, and R. Kersner. The Cauchy problem for $u_t = \Delta u + |\nabla u|^q$. *J. Math.Anal.Appl.*, 284:733–755, 2003.

[19] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zang. Dynamic scaling of growing interfaces . *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.

[20] J. Krug and H. Spohn. Universality classes for deterministic surface growth . *Phys. Rev. A.*, 38:4271–4283, 1988.

[21] Ph. Laurençot and Ph. Souplet. On the growth of mass for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *J.d'Analyse Math.*, 89:367–383, 2003.

[22] P.L. Lions. Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires . *Arch. Rati. Mech. Anal.*, 74:335–353, 1980.

[23] F. Rothe. *Global solutions of reaction-diffusion systems* , volume 1072. Springer-Verlag, 1984.

[24] Ph. Souplet. Gradient blow-up for multidimensional nonlinear parabolic equations with general boundary conditions . *Diff.Int. Equation*, 15(2):237–256, 2002.